



جمهورية مصر العربية  
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني  
الإدارة المركزية لشئون الكتب

# كتاب الطالب الرياضيات البحتة

## التفاضل والتكامل



بنك المعرفة المصري  
Egyptian Knowledge Bank



2030  
رؤية مصر  
EGYPT VISION



٢٠١٩ / ٢٠١٨

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

الصف الثالث الثانوى





جمهورية مصر العربية  
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني  
الإدارة المركزية لشئون الكتب

# كتاب الطالب الرياضيات البحتة التفاضل و التكامل

الصف الثالث الثانوى

٢٠١٨ / ٢٠١٩

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

الاسم:

الفصل:

المدرسة:

## تأليف

أ / كمال يونس كبشة

أ.د / عفاف أبو الفتوح صالح

أ / سيرافيم إلياس إسكندر

جميع الحقوق محفوظة لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو  
تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش.م.م



الطبعة الأولى ٢٠١٦ / ٢٠١٧

رقم الإيداع ٨٧٠٣ / ٢٠١٦

الرقم الدولي 8 - 031 - 706 - 977 - 978

# المقدمة

## بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلي:

يشهد عالم اليوم تطوراً علمياً مستمراً ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقاً من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمي في التفكير؛ لتصبح العقول هي أدوات التفكير العلمي وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « التفاضل والتكامل» للصف الثالث الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمي، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

### وفى ضوء ما سبق روعى فى الكتاب « التفاضل والتكامل » مايلي:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمي لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطلاب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التي تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهي كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة، يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة، وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمي، يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة، تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهdy إلى سواء السبيل



# المحتويات

## الاشتقاق وتطبيقاته

الوحدة  
الأولى

- ١ - ١ اشتقاق الدوال المثلثية. ٤
- ٢ - ١ الاشتقاق الضمني والبارامترى. ٩
- ٣ - ١ المشتقات العليا للدالة. ١٤
- ٤ - ١ معادلتى المماس والعمودى لمنحنى. ١٨
- ٥ - ١ المعدلات الزمنية المرتبطة. ٢٢
- ملخص الوحدة. ٢٩
- تمارين عامة. ٣٠
- اختبار تراكمي. ٣٣

## تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

الوحدة  
الثانية

- ١ - ٢ الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي. ٣٦
- ٢ - ٢ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية. ٤١
- ٣ - ٢ تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية. ٥٠
- ملخص الوحدة. ٥٦
- تمارين عامة. ٥٧
- اختبار تراكمي. ٥٩

## سلوك الدالة ورسم المنحنيات

الوحدة  
الثالثة

- ١-٣ تزايد وتناقص الدوال. ٦٢
- ٢-٣ القيم العظمى والصغرى ( القيم القصوى ). ٦٦
- ٣-٣ رسم المنحنيات. ٧٢
- ٤-٣ تطبيقات على القيم العظمى والصغرى. ٨٢
- ملخص الوحدة. ٨٨
- تمارين عامة. ٩٠
- اختبار تراكمي. ٩٣

## التكامل المحدد وتطبيقاته

الوحدة  
الرابعة

- ١-٤ طرق التكامل. ٩٦
- ٢-٤ تكامل الدوال المثلثية. ١٠٦
- ٣-٤ التكامل المحدد. ١١٠
- ٤-٤ المساحات فى المستوى. ١١٧
- ٥-٤ حجوم الأجسام الدورانية. ١٢٥
- ملخص الوحدة. ١٣٢
- تمارين عامة. ١٣٤
- اختبار تراكمي. ١٣٦
- اختبارات عامة. ١٣٨
- أجوبة بعض التمارين. ١٥٠

# الوحدة الأولى

## الاشتقاق وتطبيقاته

### Differentiation and it's Applications

#### مقدمة الوحدة

فى دراستك السابقة للدوال، تعرّفْتَ على دوال صريحة فى متغير واحد على الصورة  $y = f(x)$  والعمليات على هذه الدوال وتركيبها، كما بحثتَ قابلية اشتقاق الدالة المتصلة على مجال ما، وأمكنك إيجاد المشتقة الأولى للدوال الجبرية وبعض الدوال المثلثية.

فى هذه الوحدة نستكمل دراسة اشتقاق الدوال المثلثية وتعرّف دوال أخرى لا يمكن فصل متغيراتها، حيث ترتبط المتغيرات بعلاقة ضمنية أو بتعريفها من خلال متغير وسيط يعرف بالمتغير البارامترى؛ مما يتطلب دراسة أنماط أخرى للاشتقاق، مثل الاشتقاق الضمنى، والاشتقاق البارامترى الذى يعتمد على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) فى اشتقاق الدوال، كما نبحث وجود مشتقة مشتقة الدالة (المشتقة الثانية للدالة) فى إطار دراسة المشتقات العليا للدالة التى تفسح المجال لدراسة تطبيقات حياتية متعددة.

كما تهتم هذه الوحدة ببعض التطبيقات المهمة للاشتقاق فى مجالات متعددة للرياضيات والفيزياء والاقتصاد والعلوم البيولوجية من خلال دراسة معادلتى المماس والعمودى على المماس لمنحنى، والمعدلات الزمنية المرتبطة لتساعدك على نمذجة وحل بعض المشكلات الحياتية التى قد تصادفك.

#### مخرجات التعلم

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:

- يوجد مشتقات الدوال المثلثية قاس، قتا س، ظنا س.
- يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صریحة، ضمنية، بارامترية...).
- يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها.
- يوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه كتطبيق على الاشتقاق.
- يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية.

## المصطلحات الأساسية

Parametric Defferentiation	اشتقاق بارامترى	Differentiation	الاشتقاق (التفاضل)
Higher Derivatives	مشتقات عليا	First Derivative	المشتقة الأولى
Slope of the Tangent	ميل المماس	Trigonometric Function	دالة مثلثية
Equation of the Tangent	معادلة المماس	Explicit Function	دالة صريحة
Equation of the Normal	معادلة العمودى	Implicit function	دالة ضمنية
Rate	معدل	Parameter	وسيط (بارامتر)
Related Rates	معدلات مرتبطة	Implicit Defferentiation	اشتقاق ضمنى

## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Geogebra, Graph)

## دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): اشتقاق الدوال المثلثية
- الدرس (١ - ٢): الاشتقاق الضمنى والبارامترى
- الدرس (١ - ٣): المشتقات العليا للدالة
- الدرس (١ - ٤): معادلتى المماس والعمودى لمنحنى
- الدرس (١ - ٥): المعدلات الزمنية المرتبطة

## مخطط تنظيمى للوحدة





# اشتقاق الدوال المثلثية

١-١

## Derivative of Trigonometric Functions

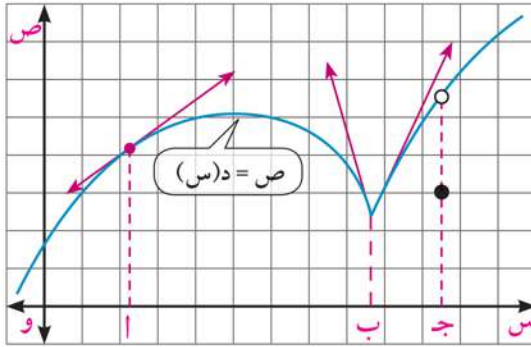
### مقدمة:

سبق لك دراسة اشتقاق بعض الدوال المثلثية، وفي هذا الدرس سنذكر بعض المفاهيم الأساسية في الاشتقاق لتتعرف مشتقات دوال مثلثية أخرى.

### فكر و ناقش

تعلم أن معدل تغير الدالة عند النقطة  $(a, f(a))$  هو  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  بشرط أن تكون النهاية موجودة، وهو أيضًا مشتقة الدالة عند نفس النقطة، ويُرمز له بالرمز  $f'(a)$  ويكون ميل المماس لمنحنى  $f$  عند النقطة  $(a, f(a))$ .

من قراءتك البيانية للشكل المقابل ناقش قابلية الدالة  $f$  للاشتقاق عند:



س = ح، س = أ، س = ب،

س ∈ [أ، ب]، س ∈ [أ، ب]

### لاحظ أن:

ميل المماس معروف لجميع نقط المنحنى باستثناء عند

س = ب، س = ح = ج وعلى ذلك فإن:

١- الدالة  $f$  غير متصلة عند  $s = ج$  فهي غير قابلة للاشتقاق عند  $ج$ .

٢- الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $s = أ$  لأن  $f'(أ)$  موجودة

٣- الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $s = ب$  لأن:

المشتقة اليمني  $f'(ب^+)$  ≠ المشتقة اليسرى  $f'(ب^-)$

٤- تكون الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على الفترة  $[أ، ب]$  إذا وجدت مشتقة للدالة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة.

٥- تكون الدالة  $f$  المعرفة على الفترة المغلقة  $[أ، ب]$  قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كان كل من  $f'(أ^+)$ ،  $f'(ب^-)$  له وجود، وكانت  $f$  قابلة للاشتقاق على الفترة  $[أ، ب]$ .

### تذكر: قواعد الاشتقاق

$$1- \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad f' = \frac{df}{dx}, \quad g' = \frac{dg}{dx}$$

### سوف تتعلم

إيجاد مشتقة:

د(س) = ظلنا س

د(س) = قاس

د(س) = قتنا س

### المصطلحات الأساسية

دالة مثلثية

Trigonometric function

Derivative

مشتقة

$\cot(x)$

ظلنا س

$\sec(x)$

قاس

$\csc(x)$

قتنا س

### الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

برامج رسومية للحاسوب.

د(س)	د'(س)
أ (أ ∈ ح)	صفر
س ن (ن ∈ ح)	ن س ن - ١
جاس (س)	جتاس
جتاس (س)	- جاس
ظاس (س)	قاس

$$\begin{aligned} -٢ \quad \frac{y}{x} &= [d(s) \pm r(s)] \frac{y}{x} \\ -٣ \quad \frac{y}{x} &= [d(s) \times r(s)] \frac{y}{x} \\ &= d(s) \cdot r'(s) + r(s) \cdot d'(s) \end{aligned}$$

$$-٤ \quad \frac{y}{x} = \left[ \frac{d(s)}{r(s)} \right] \frac{y}{x} \quad , \quad r(s) \neq 0 \quad , \quad \frac{r(s) \cdot d'(s) - d(s) \cdot r'(s)}{[r(s)]^2}$$

إذا كانت  $v = d$  (ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $e$ ،  $r = r(s)$  قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $s$ ،

فإن  $v = d$  تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $s$

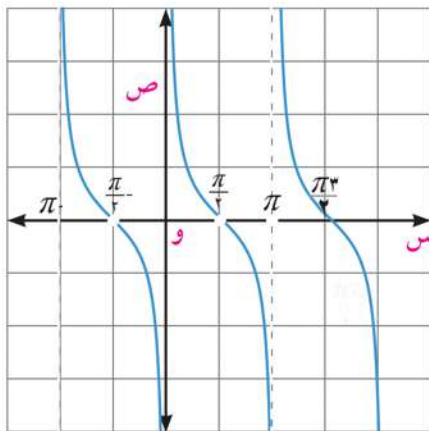
ويكون:  $\frac{v}{s} = \frac{v}{e} \times \frac{e}{s}$  [ قاعدة السلسلة ]

أي إن:  $\frac{v}{s} = d \cdot [r(s)]' = r'(s) \cdot d$

إذا كانت  $d$  دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $s$ ،  $n$  عددًا حقيقيًا

فإن:  $\frac{v}{s} = [d(s)]^n = n [d(s)]^{n-1} \times d'(s)$

أي إن إذا كانت  $v = d(s)$  فإن  $\frac{v}{s} = n(v) = n \cdot v^{n-1} \cdot \frac{v}{s}$



ص = ظنا س

تعلم



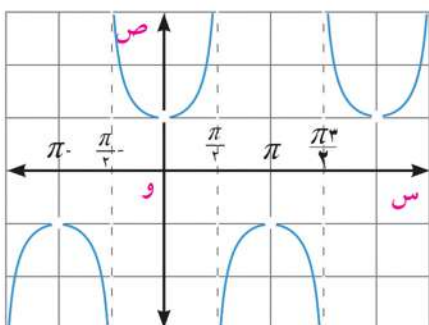
إذا كانت  $v = \text{ظنا س}$  حيث  $s \in \mathbb{R}$ ،  $s \neq \pi/2, 3\pi/2$ ،  $n \in \mathbb{R}$

فإن:  $\frac{v}{s} = (\text{ظنا س})' = -\cot^2 s$

لاحظ أن:

$$\frac{v}{s} = \left( \frac{1}{\cos s} \right)' = \frac{1}{\cos^2 s} = \frac{1}{\cos^2 s}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 s} = \frac{1}{\cos^2 s} = \frac{1}{\cos^2 s}$$



ص = قاس

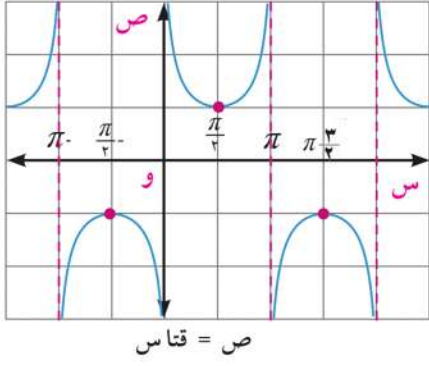
إذا كانت  $v = \text{قاس}$  حيث:

$s \in \mathbb{R}$ ،  $s \neq \pi/2, 3\pi/2$ ،  $n \in \mathbb{R}$

فإن:

$\frac{v}{s} = (\text{قاس})' = \frac{1}{\cos^2 s}$  (تحقق من ذلك)





### ٣ - مشتقة دالة قاطع التمام :

إذا كانت ص = قتا س حيث

س  $\in$  ج ، س  $\neq$  ن  $\pi$  ، ن  $\in$  ص

تحقق من ذلك

فإن :  $\frac{ص}{س} = -$  قتا س

مثال

١ أوجد  $\frac{ص}{س}$  لكل مما يأتي:

ب ص = ٣ قاس - ٥ ظاس

أ ص = ٣ س + ٤ ظتا س

د ص =  $\frac{١ - \text{ظتا س}}{١ + \text{ظتا س}}$

ج ص = ٣ قتا س

الحل

أ  $\frac{ص}{س} = \frac{٣ \times ٥ س + ٤}{١٥ س - ٤} = \frac{١٥ س + ٤}{١٥ س - ٤}$

ب  $\frac{ص}{س} = \frac{٣ (١ + \text{ظتا س}) - ٥}{٣ (١ + \text{ظتا س}) + ٤} = \frac{٣ + ٣ \text{ظتا س} - ٥}{٣ + ٣ \text{ظتا س} + ٤} = \frac{-٢ + ٣ \text{ظتا س}}{٧ + ٣ \text{ظتا س}}$

ج  $\frac{ص}{س} = \frac{٣ س^٢ قتا س + س^٣ (- \text{قتا س ظتا س})}{٣ س^٢ قتا س + س^٣ (- \text{قتا س ظتا س})} = \frac{٣ س^٢ قتا س - س^٣ \text{ظتا س}}{٣ س^٢ قتا س - س^٣ \text{ظتا س}}$

د  $\frac{ص}{س} = \frac{(١ + \text{ظتا س}) (١ - \text{ظتا س}) - (١ - \text{ظتا س}) (١ + \text{ظتا س})}{(١ + \text{ظتا س})^٢} = \frac{١ - \text{ظتا س}^٢ - ١ + \text{ظتا س}^٢}{(١ + \text{ظتا س})^٢} = \frac{٠}{(١ + \text{ظتا س})^٢} = ٠$

$\frac{٢ قتا س}{(١ + \text{ظتا س})^٢} = \frac{٢ قتا س [١ + \text{ظتا س} - ١ - \text{ظتا س}]}{(١ + \text{ظتا س})^٢} = \frac{٠}{(١ + \text{ظتا س})^٢} = ٠$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد  $\frac{ص}{س}$  إذا كانت ص تساوي:

ج قاس طاس

ب جتا س + ٤ قاس

أ ٢ جاس - ٣ ظتا س

و  $\frac{١ - \text{قتا س}}{١ + \text{قتا س}}$

ه  $\frac{\text{قاس}}{١ + \text{قاس}}$

د قتا س ظتا س

مثال

٢ أوجد  $\frac{ص}{س}$  لكل مما يأتي:

ب ص = ظتا (جتا ٣ س)

أ ص = قا (٥ س + ٢)

د ص = (٣ - ٢ ظتا س)٣

ج ص = قتا (١ + ٣ س)٢

الحل

أ)  $\therefore \text{ص} = \text{قا} (٢ + \text{س})$  بوضع  $\text{ع} = ٥ + \text{س} + ٢$   $\therefore \frac{\text{ع}}{\text{س}} = ٥$

ويكون  $\text{ص} = \text{قا} \text{ع}$  حيث  $\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{قا}}{\text{ع}}$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{س}}$  [قاعدة السلسلة]

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} \times \text{قا} (٢ + \text{س}) = ٥ \times \text{قا} (٢ + \text{س})$

حل آخر:

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} \text{د} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} \times \text{ر} = \text{د}$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{قا} (٢ + \text{س}) \text{ظا} (٢ + \text{س}) \frac{\text{س}}{\text{س}} (٢ + \text{س})$

$= ٥ \text{ قا} (٢ + \text{س}) \text{ ظا} (٢ + \text{س})$

ب)  $\text{ص} = \text{ظتا} (٣ + \text{س})$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} - \text{قتا} (٣ + \text{س}) \frac{\text{س}}{\text{س}} (٣ + \text{س})$

$= - \text{قتا} (٣ + \text{س}) \times [- \text{جا} ٣ \text{ س} \times ٣] = ٣ \text{ جا} ٣ \text{ س قتا} (٣ + \text{س})$

ج)  $\text{ص} = \text{قتا} (١ + ٣ \text{س})$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} ٢ \text{ قتا} (١ + ٣ \text{س}) \times - \text{قتا} (١ + ٣ \text{س}) \text{ظتا} (١ + ٣ \text{س}) \times ٦ \text{ س}$

$= - ١٢ \text{ س ظتا} (١ + ٣ \text{س}) \text{ قتا} (١ + ٣ \text{س})$

د)  $\text{ص} = (٣ - ٢ \text{ظتا} \text{س})^٢$

$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} ٣ (٣ - ٢ \text{ظتا} \text{س})^٢ \times ٢ - (- \text{قتا} \text{س}) = ٦ \text{ قتا} \text{س} (٣ - ٢ \text{ظتا} \text{س})^٢$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  إذا كانت  $\text{ص}$  تساوي:

ج)  $\text{جا} (٣ \text{س})^٢$

ب)  $\text{قا} \sqrt{٢ - \text{س}}$

أ)  $\text{ظتا} (٣ + ٢ \text{س})$

و)  $\text{س}^٢ \text{ قا} \frac{١}{\text{س}}$

هـ)  $- \text{قتا} (٢ + \text{س})^٣$

د)  $٣ \text{ قا} ٢ \text{ س} + ٢ \text{ قتا} ٣ \text{ س}$

## تمارين الدرس (١ - ١)

٢	١	س
٤	١ -	د(س)
١	٢	ر(س)
٥	١	د/س
٣ -	٢	ر/س

إذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س، أكمل ما يأتي:  
باستخدام القيم المعطاه فى الجدول المقابل:

١ ق (س) = ٣ د(س) - ٢ ر(س) فإن ق'(١) = .....

٢ ق (س) = د(س) [٥ + ر(س)] فإن ق'(٢) = .....

٣ ق (س) = د(س) ÷ [٢ + (س)] فإن ق'(١) = .....

٤ ق (س) = د [ر(س)] فإن ق'(١) = .....

٥ ق (س) = ر [٣ س - د(س)] فإن ق'(٢) = .....

٦ ق (س) = [س<sup>٣</sup> + ر(س)]<sup>٢</sup> فإن ق'(١) = .....

أوجد  $\frac{د}{ر}$  لكل مما يأتي:

٧ ص = س<sup>٣</sup> - ٢ قاس ٨ ص = قتا (٢ - س<sup>٣</sup>) ٩ ص = ظلنا ( $\pi - \frac{١}{س}$ )

١٠ ص = ظا (ظلنا س) ١١ ص = (١ + ظلنا س)<sup>٢</sup> ١٢ ص = قتا ( $\pi - س^٢$ )

١٣ ص = جتا س<sup>٢</sup> - ٥ ظلنا س<sup>٣</sup> ١٤ ص = طا س<sup>٣</sup> - قتا س<sup>٢</sup> ١٥ ص = جا س<sup>٣</sup> + قاس س<sup>٢</sup>

١٦ ص = قاس طا س<sup>٢</sup> ١٧ ص = ظلنا س<sup>٢</sup>  $\sqrt{١٠}$  ١٨ ص = قتا<sup>٢</sup> (١ + س<sup>٢</sup>)

١٩ ص = ٣ قاس<sup>٢</sup> (٢ س +  $\pi$ ) ٢٠ ص =  $\sqrt{١٠}$  + قتا س ٢١ ص = س<sup>٢</sup> ظلنا س<sup>٣</sup>

٢٢ ص = (قتا س + ظلنا س)<sup>-١</sup> ٢٣ ص =  $\frac{\text{ظلنا س}^٣}{٣ + س^٢}$  ٢٤ ص =  $\frac{١ - \text{قاس}}{١ + \text{قاس}}$

أجب عما يأتي:

٢٥ إذا كانت ص = ظلنا  $\frac{\pi}{٦}$  ع ، ع =  $\sqrt{٣}$   $\sqrt{١٠}$  س أوجد  $\frac{د}{ر}$  عند س = ١

٢٦ إذا كانت ص =  $\sqrt{١٠ - ٥ ع}$  ، ع = ٢ س أثبت أن  $\sqrt{٣}$   $\frac{د}{ر}$  = ١٢ + ٠ عند س =  $\frac{\pi}{٦}$

٢٧ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) لكل مما يأتي:

أ ص = ٢ ظلنا س +  $\sqrt{٣}$  قاس عند س =  $\frac{\pi}{٤}$

ب ص = ٣ طاس - قتا<sup>٢</sup> س عند س =  $\frac{\pi ٣}{٤}$

## Implicit and Parametric Defferentiation

## سوف تتعلم

- الاشتقاق الضمني
- الاشتقاق البارامترى

## المصطلحات الأساسية

- Relation علاقة
- Explicit function دالة صريحة
- Implicit function دالة ضمنية
- Parameter وسيط

## الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- Scientific calculator

## الاشتقاق الضمني Implicit Defferentiation

سبق لك إيجاد مشتقة دالة معرفة بالصورة  $y = f(x)$  وهي دالة صريحة explicit function للمتغير المستقل  $x$  حيث تحدد قيمة  $y$  مباشرة متى علم قيمة  $x$  مثل:

$$y = x^2 - 5x + 2, \quad y = (x + 3), \quad y = \frac{x + 1}{x - 1}, \dots$$

ويكون  $y' = 2x - 5, \quad y' = 1, \quad y' = \frac{1}{x^2 - 1} = \dots$

أما إذا كانت  $y$  مرتبطة بالمتغير  $x$  بمعادلة تحوى  $x$ ،  $y$  معاً مثل:

$$x^2 + y^2 - 9 = 0, \quad (x + 1)^2 = 4$$

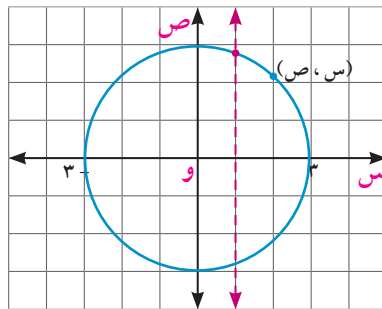
فكل معادلة تعرف علاقة ضمنية implicit relation بين  $x$ ،  $y$ ؛ تعبر عن العلاقة بين إحداثيي نقطة  $(x, y)$  واقعة على منحناها البياني.

## لاحظ أن:

١- يمكن كتابة المعادلة  $x^2 + y^2 - 9 = 0$  بالصورة:

$$y^2 = 9 - x^2 \quad \therefore y = \pm \sqrt{9 - x^2} \quad \text{حيث } x \neq \pm 3$$

وفى هذه الحالة تعرف العلاقة الضمنية دالة واحدة صريحة.



٢- مجموعة النقط  $(x, y)$  التى

تحقق المعادلة  $x^2 + y^2 = 9$  ترسم

دائرة مركزها نقطة الأصل وطول

نصف قطرها ٣ وحدات، ومن

اختبار الخط الرأسى نلاحظ أن

العلاقة  $x^2 + y^2 = 9$  لا تمثل دالة

$$\text{غير أن } y^2 = 9 - x^2$$

$$\therefore y = \pm \sqrt{9 - x^2}$$

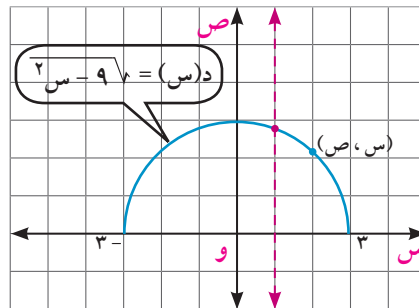
فيمكن أن تعرف العلاقة الضمنية

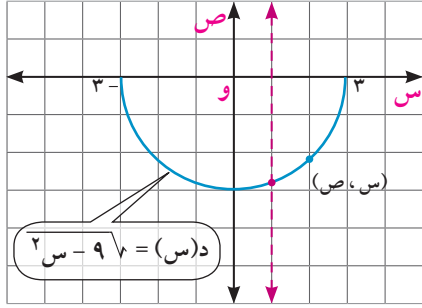
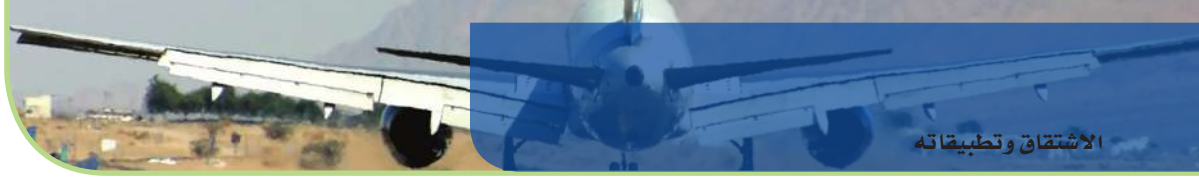
$x^2 + y^2 = 9$  دالتين صريحتين

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{الأولى}$$

مجالها  $[-3, 3]$  ومداها  $[0, 3]$  وقابلة

للاشتقاق لكل  $x \in [-3, 3]$





والثانية : ص =  $\sqrt{9 - x^2}$

مجالها  $[-3, 3]$  ومداها  $[-3, 0]$

وقابلة للاشتقاق لكل  $x \in [-3, 3]$

في كثير من المعادلات على الصورة  $D(x, y) = 0$  يصعب التعبير عن ص بدلالة س مباشرة؛ لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى س، تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية implicit function

عملية اشتقاق الدالة الضمنية (الاشتقاق الضمني) يتطلب اشتقاق

كل من طرفي المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص وفقاً لقاعدة السلسلة لتحصل على  $\frac{dy}{dx}$  أو  $\frac{dx}{dy}$  على الترتيب.

### مثال

١ أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كان:

ب  $3x^2 + y^2 = 7$

أ  $x^3 + y^2 - 7x + 5 = 8$

### الحل

أ لاحظ أن المعادلة لا تعطي ص صراحة بدلالة س، لإيجاد  $\frac{dy}{dx}$  نشق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س مع مراعاة أن ص دالة للمتغير س وقابلة للاشتقاق فيكون:

$$3x^2 + y^2 - 7x + 5 = 8 \Rightarrow \frac{d}{dx}(3x^2 + y^2 - 7x + 5) = \frac{d}{dx}8$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + y^2 - 7x + 5) = \frac{d}{dx}8 \Rightarrow 6x + 2y \frac{dy}{dx} - 7 = 0$$

ب  $\therefore 3x^2 + y^2 = 7$  باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س.

$$\therefore \frac{d}{dx}(3x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}7 \Rightarrow 6x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 + y^2 = 7 \Rightarrow \frac{d}{dx}(3x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}7 \Rightarrow 6x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}7 \Rightarrow 6x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y}$$

### ٤ حاول أن تحل

١ أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كان:

ب  $x^2 + y^2 = 25$

أ  $x^3 - 5x + y = 4$

### مثال

٢ أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كان:

ب  $2x + y^2 = 3$

أ  $2x = y + 3$

**الحل**

أ) اشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$\therefore \frac{z}{s} = (جا ٢ ص) \frac{z}{s} = (ص جتا ٣ س)$$

$$جتا ٢ ص \times \frac{z}{s} = \frac{z}{s} [ - جا ٣ س \times ٣ + جتا ٣ س ] \frac{z}{s}$$

$$\frac{z}{s} [ ٢ جتا ٢ ص - جتا ٣ س ] = - ٣ ص جا ٣ س \therefore \frac{z}{s} = \frac{٣ ص جا ٣ س}{جتا ٣ س - ٢ جتا ٢ ص}$$

ب) اشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$\frac{z}{s} (طا ٢ س) + \frac{z}{s} (ظنا ص) = \frac{z}{s} (س ص)$$

$$٢ قا ٢ س - قتا ٢ ص \frac{z}{s} = \frac{z}{s} ص + \frac{z}{s} ص$$

$$\frac{z}{s} [ س + قتا ٢ ص ] = ٢ قا ٢ س - ص \therefore \frac{z}{s} = \frac{٢ قا ٢ س - ص}{س + قتا ٢ ص}$$

**٤ حاول أن تحل**

٢) أوجد  $\frac{z}{s}$  إذا كان:

أ)  $س جتا ص + ص جتا س = ١$       ب)  $٣ ص = جا س جتا ٢ ص$

**لاحظ أن:** الصيغة النهائية للمشتقة  $\frac{z}{s}$  فى الاشتقاق الضمنى تحوى كلاً من س ، ص مما يجعل حسابها شاقاً عند إحدى قيم س لحاجتنا أولاً لمعرفة قيمة ص المناظرة لها والتي يصعب تحديدها من العلاقة الضمنية.

**Parametric Defferentiation**

**الاشتقاق البارامترى**

إذا أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى ، والإحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) كدالة فى متغير ثالث ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين:

$$س = د(ن) ، ص = ر(ن) \quad \text{حيث د ، ر لهما مجال مشترك}$$

فإن المعادلتين معاً تمثلان معادلة لمنحنى واحد معبراً عنه بالصورة البارامترية

**تعلم**

للمنحنى المعطى على الصورة البارامترية  $س = د(ن) ، ص = ر(ن)$

$$\frac{z}{s} = \frac{z}{ن} \times \frac{ن}{س} = \frac{z}{ن} \div \frac{س}{ن} = \frac{z}{ن} \div \frac{س}{ن} \text{ حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن.}$$

**مثال**

٣) أوجد  $\frac{z}{s}$  للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

أ)  $س = ٥ + ن ، ص = ١٦ ن^٢ + ٩ ، ن = ٥$       ب)  $س = ٣ جتا ٢ \theta ، ص = ٤ جا ٣ \theta ، \theta = \frac{\pi}{٤}$



## الحل

$$\text{أ} \quad \text{س} = 5\text{ن} + 3, \quad \frac{\text{س}}{\text{ن}} = 5, \quad \text{ص} = 16\text{ن} + 9, \quad \frac{\text{ص}}{\text{ن}} = 16$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\frac{\text{ص}}{\text{ن}}}{\frac{\text{س}}{\text{ن}}} = \frac{16}{5} = \frac{32}{5} \quad \text{ويكون} \left[ \frac{\text{ص}}{\text{س}} \right]_{\text{ن}=5} = \frac{32}{5}$$

$$\text{ب} \quad \text{س} = 3 \text{ جتا } \theta_2, \quad \frac{\text{س}}{\theta_2} = 3 = 2 \times \text{جا } \theta_2 - 1 = \frac{\text{س}}{\theta_2}$$

$$\text{ص} = 4 \text{ جتا } \theta_3, \quad \frac{\text{ص}}{\theta_3} = 4 = 3 \times \text{جتا } \theta_3 - 1 = \frac{\text{ص}}{\theta_3}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\frac{\text{ص}}{\theta_3}}{\frac{\text{س}}{\theta_2}} = \frac{\theta_2}{\theta_3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\text{عند } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{فإن} \quad \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\frac{\pi}{4} \text{ جتا } \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} \text{ جا } \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

## ٦ حاول أن تحل

٣ أوجد  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة

$$\text{أ} \quad \text{س} = (7 + \text{ن})(2 - \text{ن}), \quad \text{ص} = (2 + \text{ن})(1 - \text{ن}), \quad \text{ن} = 1$$

$$\text{ب} \quad \text{س} = 1 - \theta, \quad \text{ص} = \theta, \quad \frac{\pi}{4} = \theta, \quad \frac{\pi}{4} = \theta, \quad \text{س} = \sqrt{2 - \text{ن}}, \quad \text{ص} = \sqrt{1 + \text{ن}}, \quad \text{ن} = 2$$

تفكير ناقد: أوجد قيمة البارامترع التي يكون عندها للمنحنى

$$\text{س} = 2\text{ع}^3 - 5\text{ع}^2 + 4\text{ع} + 12, \quad \text{ص} = 2\text{ع}^2 + \text{ع} - 4 \quad \text{مماس أفقى وآخر رأسى.}$$

## مثال

$$\text{٤} \quad \text{أوجد مشتقة } (4\text{س}^3 - 9\text{س}^2 + 5) \text{ بالنسبة إلى } (3\text{س}^2 + 7)$$

## الحل

$$\text{بوضع ص} = 4\text{س}^3 - 9\text{س}^2 + 5, \quad \text{ع} = 3\text{س}^2 + 7 \quad \text{فتكون ص} = \text{د}(\text{س}), \quad \text{ع} = \text{ر}(\text{س})$$

الدالتان د، ر قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى س باعتبار س بارامتر لكل من المتغيرين ص، ع.  
∴ من الاشتقاق البارامترى نجد أن:

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}'}{\text{ع}'} = \frac{12\text{س}^2 - 18\text{س}}{6\text{س}} = \frac{2\text{س} - 3}{1} = 2\text{س} - 3 \quad \text{أى أن} \quad \frac{\text{ص}}{\text{س}} = [4\text{س}^3 - 9\text{س}^2 + 5]_{\text{س}^2=3\text{س}+7} = 2\text{س} - 3$$

## ٦ حاول أن تحل

٤ باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد:

$$\text{أ} \quad \text{مشتقة } \text{س}^2 + 1 \quad \text{بالنسبة إلى } \sqrt{1 - \text{س}^3}$$

$$\text{ب} \quad \text{مشتقة } \sqrt{8 + \text{س}^3} \quad \text{بالنسبة إلى } \frac{\text{س}}{1 + \text{س}} \quad \text{عند س} = 1$$

$$\text{ج} \quad \text{مشتقة س} - \text{جا س} \quad \text{بالنسبة إلى } 1 - \text{جتا س} \quad \text{عند س} = \frac{\pi}{3}$$

## تمارين الدرس (١ - ٢)

أولاً: أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) إذا كانت  $s^2 + v^2 = 1$  فإن  $\frac{ds}{dv}$  يساوي:
- أ)  $s$       ب)  $\frac{1}{v}$       ج)  $-\frac{s}{v}$       د)  $-\frac{v}{s}$
- ٢) إذا كانت  $s^2 + v^2 = 2$  فإن  $\frac{ds}{dv}$  يساوي:
- أ)  $1 - s$       ب) صفر      ج)  $1$       د)  $2$
- ٣) إذا كانت  $v^2 - 2\sqrt{s} = 0$  فإن  $\frac{ds}{dv}$  يساوي:
- أ)  $\frac{2v}{\sqrt{s}}$       ب)  $\sqrt{s}$       ج)  $\frac{s}{v}$       د)  $\frac{1}{v}$
- ٤) إذا كان  $s = 2 + 3v$ ،  $v = \sqrt[3]{n}$ ،  $n = 1$  فإن  $\frac{ds}{dn}$  يساوي:
- أ)  $\frac{3}{8}$       ب)  $\frac{3}{4}$       ج)  $2$       د)  $6$
- ٥) ميل المماس للمنحنى  $s^2 = 3$  عند النقطة  $(3, 1)$  يساوي:
- أ)  $3 -$       ب)  $-\frac{1}{3}$       ج)  $\frac{1}{3}$       د)  $\frac{3}{2}$

ثانياً: أوجد  $\frac{ds}{dv}$  في كل مما يأتي:

- ٦)  $s^2 - 2v^2 + 7 = 0$       ٧)  $s^4 + 3v^4 - 2 = 0$       ٨)  $s^2 - 2s + 5 = v^2$
- ٩)  $s^3 + 6s = v^4 + 3$       ١٠)  $\frac{v}{s} + \frac{s}{v} = 1$       ١١)  $s + v = 5$
- ١٢)  $s + v = 0$       ١٣)  $s^2 + v^2 = 0$       ١٤)  $s^2 + v^2 = 9$
- ١٥)  $s^2 + 2v = \frac{3}{4}$

ثالثاً: أوجد  $\frac{ds}{dv}$  للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

- ١٦)  $s^2 - 13 = 2n$ ،  $v = 2 - \sqrt{n}$ ،  $n = 4$
- ١٧)  $s = 2\pi\theta$ ،  $v = 2\pi\theta$ ،  $\theta = \frac{1}{4}$
- ١٨)  $s = 5 + 3\theta$ ،  $v = 1 - 3\theta$ ،  $\theta = \frac{\pi}{4}$
- ١٩) أوجد ميل المماس للمنحنى  $\sqrt{s} + 3 = 1 + v$  عند النقطة  $(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4})$
- ٢٠) أوجد مشتقة  $\frac{1+s}{1-s}$  بالنسبة إلى  $\sqrt{s} + 1$  عند  $s = 4$
- ٢١) أوجد قيمة البارامتر  $n$  التي عندها يكون للمنحنى  $s^2 - 2n = 5 + 4n - 9$ ،  $v = 2n + 5 - 0$
- أ) مماس رأسى.      ب) مماس أفقى.

## المشتقات العليا للدالة

## Higher Derivatives of a Function

## فكر و ناقش



إذا كانت  $v = d(s)$  حيث  $v = s^4 + s^3 - 2s + 3$  أوجد مشتقة الدالة  $d$ ، هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة إلى  $s$ ؟ لماذا؟ هل تتوقف عملية الاشتقاق؟ فسر إجابتك.

## تعلم



(Higher - Order Derivative)

## المشتقات ذات الرتب العليا

إذا كانت  $v = d(s)$  حيث  $d$  دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $s$  فإن مشتقتها الأولى (First derivative) هي  $v' = \frac{dv}{ds} = d'(s)$  وتمثل دالة جديدة.

وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $s$  فإن مشتقتها  $\frac{dv'}{ds} = \frac{d^2v}{ds^2}$  تسمى المشتقة الثانية (Second Derivative) للدالة  $d$  وتمثل دالة أخرى

$$\text{ويُرمز لها بالرمز } v'' = \frac{d^2v}{ds^2} = d''(s)$$

بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة (Third Derivative) للدالة  $d$

$$\text{ونرمز لها بالرمز } \frac{d^3v}{ds^3}, \dots \text{ وهكذا}$$

تسمى المشتقات لدالة بدءاً من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا، وتكتب المشتقة من الرتبة  $n$  كما يلي :

$$v^{(n)} = \frac{d^n v}{ds^n} = d^{(n)}(s) \quad \text{حيث } n \text{ عدد صحيح موجب}$$

لاحظ أن :

$$1 - \frac{d^2v}{ds^2} \quad \text{تقرأ دال اثنين ص دال س اثنين}$$

٢- يوجد اختلاف بين  $\frac{d^2v}{ds^2}$ ،  $\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$  فالأولى تدل على المشتقة الثانية للدالة بينما الثانية تدل على مربع المشتقة الأولى.

## مثال



١ أوجد المشتقة الثانية لكل من:

$$\text{أ} \quad v = s^2 + s^3 - 5 \quad \text{ب} \quad v = \frac{s+1}{s-1}$$

## سوف تتعلم



إيجاد مشتقات ذات رتب أعلى للدالة.

## المصطلحات الأساسية



رتبة  $\Rightarrow$  Order  
مشتقة  $\Rightarrow$  Derivative

## الأدوات المستخدمة



آلة حاسبة علمية.

Scientific calculator

ج ص = جا (٣ - ٢)

د ص =  $\sqrt[3]{٣ - ٢}$

الحل

أ  $\therefore$  ص =  $٢س + ٣س - ٥$  ،  $س \in \mathbb{C}$   $\therefore$   $\frac{ص}{س} = \frac{٨س + ٣}{٣س}$  ،  $\frac{ص^٢}{س} = \frac{٤س^٢}{٢س}$  ،

ب  $\therefore$  ص =  $\frac{١ + س}{١ - س}$  ،  $س \neq ١$   $\therefore$   $\frac{ص}{س} = \frac{س - (١ + س)}{٢(١ - س)} = \frac{١ - (١ + س)}{٢(١ - س)}$  ،  $س \neq ١$

$\frac{ص^٢}{س} = \frac{٤}{٢(١ - س)} = \frac{٢}{١ - س}$  ،  $س \neq ١$

ج  $\therefore$  ص = جا (٣ - ٢) ،  $س \in \mathbb{C}$   $\therefore$   $\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٣س}$  ،  $\frac{ص^٢}{س} = \frac{٩}{٣س}$  ،  $٩ =$  جا (٣ - ٢)

د  $\therefore$  ص =  $\sqrt[3]{٣ - ٢}$  ،  $س \leq \frac{٢}{٣}$   $\therefore$   $\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢ - ٣س}$  ،  $س < \frac{٢}{٣}$

$\frac{ص^٢}{س} = \frac{٩}{٣(٢ - ٣س)} = \left[ \frac{٣}{٢} (٢ - ٣س) \right]^{-١} = \frac{٩}{٣(٢ - ٣س)}$  ،  $س < \frac{٢}{٣}$

#### ٩ حاول أن تحل

١ أوجد المشتقة الثالثة لكل من:

ب  $ع = (٢ - ن)^٤$

أ ص =  $٢س - ٤س + ٥$

د (س) =  $\frac{س}{١ - س}$

ج د(س) = جتا (٢ + س) ( $\pi$ )

تفكير ناقذ: إذا كانت ص = جا س استكشف نمط الاشتقاق المتتالي، أوجد ص<sup>(٢٥)</sup>

مثال

٢ إذا كانت ص<sup>٢</sup> + ٢س ص = ٨ أثبت أن: (س + ص)  $\frac{ص^٢}{س} + ٢ \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} \left( \frac{ص}{س} \right)^٢ =$  صفر

الحل

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

أ  $\therefore$  ص<sup>٢</sup> + ٢س ص = ٨ ،

بالقسمة على ٢  $\therefore$   $٠ = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} + \frac{ص^٢}{س}$  ،

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$٠ = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} + \frac{ص^٢}{س}$  ،

$\therefore$   $٠ = \frac{ص}{س} + \left( \frac{ص}{س} + ١ \right) \frac{ص}{س} + \frac{ص^٢}{س}$  ،

ويكون (س + ص)  $\frac{ص^٢}{س} + ٢ \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} \left( \frac{ص}{س} \right)^٢ =$  صفر

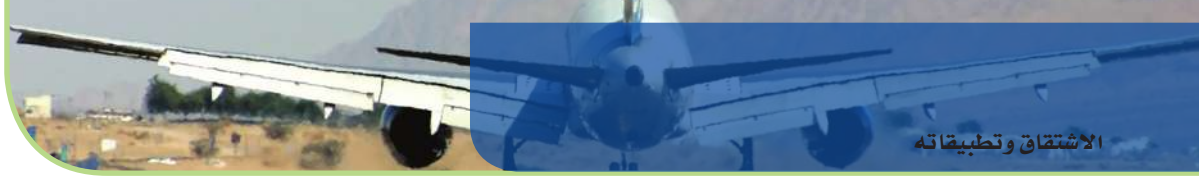
#### ٩ حاول أن تحل

أثبت أن: ص =  $١ + \frac{ص^٢}{س} + \frac{ص}{س}$  ،

٢ إذا كانت ص<sup>٢</sup> + ٢س ص = ٩

أثبت أن:  $٢ص = \frac{ص^٢}{س} + (١ + ص)$  ،

ب إذا كانت ص = طاس



## معادلات بارامترية

مثال

٣ إذا كانت  $s = 2n^3 - 5$  ،  $v = 6n^2 + 1$  أوجد  $\frac{dv}{ds}$  عند  $n = 1$

الحل

باشتقاق كل من  $s$  ،  $v$  بالنسبة للبارامتر  $n$

$$\therefore \frac{ds}{dn} = 6n^2 - 10 \quad , \quad \frac{dv}{dn} = 12n$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{\frac{dv}{dn}}{\frac{ds}{dn}} = \frac{12n}{6n^2 - 10}$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{12n}{6n^2 - 10} = \frac{12}{6n - 10} \quad , \quad n \neq 0$$

$$\text{ويكون } \frac{dv}{ds} = \frac{12}{6n - 10} = \frac{12}{-2} = -6 \quad \text{عند } n = 1$$

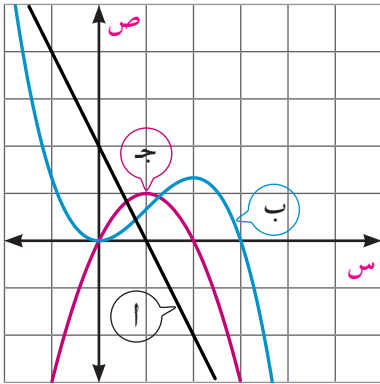
$$\therefore \frac{1}{-2} = \frac{1}{6n - 10} \times \frac{12}{1} = \frac{12}{-2} = -6$$

٩ حاول أن تحل

٣ إذا كانت  $s = 2e^2 - 5$  ،  $v = 6e^2 + 1$  أوجد  $\frac{dv}{ds}$  عند  $e = 2$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{12e}{4e} = 3 \quad \text{عند } e = 2$$

**تفكير ناقد:** يبين الشكل المقابل تمثيلاً بيانياً لمنحنيات الدوال  $d(s)$  ،  $d'(s)$  ،  $d''(s)$  حيث  $d(s)$  كثيرة حدود، حدد منحنى كل دالة.



نشاط

باستخدام البرنامج الرسومي geogebra أو أى برنامج آخر ارسم الدوال التالية ومشتقاتها الأولى والثانية وسجل ملاحظتك.

أ  $d(s) = s^3 - 4s^2 + 12$  ب  $d(s) = \frac{1}{4}s^2 + 4$

هل تتوافق ملاحظتك مع قرارك في بند تفكير ناقد؟

## تمارين الدرس (١ - ٣)

١ إذا كانت  $ص = اس^٣ + بس^٢ + جس + ك$  وكانت ارتباطات  $س، ص، ص'، ص''$  موضحة بالجدول التالي:  
أوجد قيم  $أ، ب، ج، ك$  الحقيقية ثم أكمل الجدول.

س	ص	ص'	ص''
١	٨		٢٨
٢		٧٥	٣٤

أوجد المشتقة الثالثة لكلاً مما يأتي:

- ٢  $ص = س^٥ - س^٤ + ٣$   
٤  $ص = جا(٢س - ٧)$   
٦  $ص = جاس جتاس$   
٣  $ص = س^٢ + ١$   
٥  $ص = جتا(٣س - \pi)$   
٧  $ص = \sqrt[٢]{٥ - س}$

أجب عما يأتي:

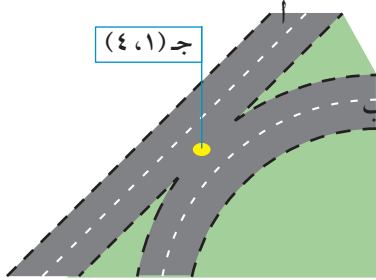
- ٨ إذا كان  $٣س = ٥ + ٢س$   $ص = ٢س$   
٩ إذا كان  $٢س + ٢ص = ٤$   
١٠ إذا كان  $ص = ٣جتا(٢س + ١)$   
١١ إذا كان  $س ص = جاس جتاس$   
١٢ إذا كان  $ص = س جاس$   
١٣ إذا كان  $ص = قاس$   
١٤ إذا كان  $\frac{ص}{س} = ٢س - ٣$ ،  $\frac{ص}{س} = ١ - ٢س$  أوجد:  $\frac{ص}{س}$  عند  $س = ٢$   
١٥ إذا كان  $٣س = ١ - ٢$ ،  $ص = ٢ + ٣$  أوجد:  $\frac{ص}{س}$  عند  $ن = ٢$   
١٦ إذا كان  $ص = \frac{١+ع}{١-ع}$ ،  $ص = \frac{١-ع}{١+ع}$  أوجد:  $\frac{ص}{س}$  عند  $ع = ٢$   
١٧ إذا كان  $س = قاع$ ،  $ص = \sqrt[٢]{ظاع}$  أثبت أن:  $\frac{ص}{س} = ٢$



# معادلتا المماس والعمودي لمنحنى

## Equation of the Tangent and the Normal to a Curve

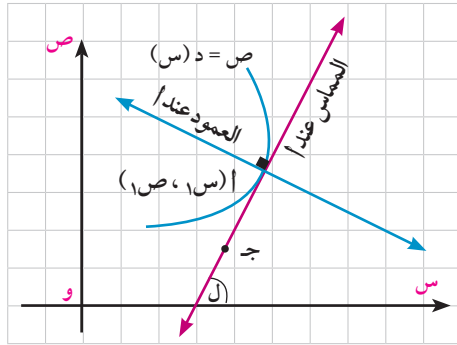
### فكر و ناقش



يوضح الشكل المقابل طريقتين أ ، ب أحدهما مستقيم والآخر منحنى متلاقين عند الموقع ج . إذا كان الموقع جـ تمثله النقطة جـ (٤ ، ١) في مستوى إحداثي متعامد، وكانت معادلة الطريق ب :  $ص = ٢س - ٣$  ، هل يمكنك إيجاد معادلة الطريق أ ؟

هل يمر الطريق أ بالنقطة (٧ ، ١٠) ؟ فسر إجابتك.

### تعلم



إذا كانت النقطة أ (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) تقع على منحنى الدالة د حيث  $ص = د(س)$  ، م ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة ، فإن :

١- معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) هي :

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

٢- معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) هي :

$$ص - ص_١ = \frac{1}{م} (س - س_١)$$

### مثال دوال مثلثية

١ أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى  $ص = ٢س - \frac{\pi}{٤}$  ظنا س عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى يساوى  $\frac{\pi}{٤}$

الحل

لإيجاد نقطة تقع على المنحنى عند  $س = \frac{\pi}{٤}$  نحسب إحداثيها الصادى حيث :

$$ص = ٢س - \frac{\pi}{٤} \text{ ظنا س } \therefore ص = ٢ \times \frac{\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٤}$$

أى إن النقطة  $(\frac{\pi}{٤}, ١ - \frac{\pi}{٤})$  تقع على المنحنى

ميل مماس المنحنى عند أى نقطة  $ص = ٢س - \frac{\pi}{٤}$  =  $\frac{٢}{١}$  =  $٢$  =  $٢ + \frac{\pi}{٤}$  س

### سوف تتعلم

- إيجاد معادلة المماس عند نقطة واقعة على المنحنى .
- إيجاد معادلة العمودي لمنحنى عند نقطة واقعة على المنحنى .

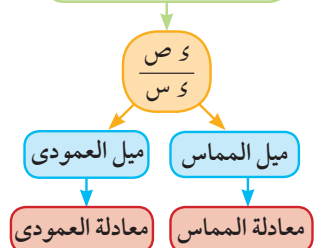
### المصطلحات الأساسية

- ميل المماس Slope of the Tangent
- ميل العمودي Slope of the Normal

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية .
- برامج رسومية للحاسب .

### نقطة على المنحنى



∴ عند النقطة  $(\frac{\pi}{4}, 1 - \frac{\pi}{4})$ :

ميل المماس =  $2 + [\frac{\pi}{4}]$  ، ميل العمودي =  $-\frac{1}{4}$

**معادلة المماس:**  $ص = (1 - \frac{\pi}{4}) - (س - \frac{\pi}{4})$  **أى إن:**  $ص = 1 - \frac{\pi}{4} - س + \frac{\pi}{4}$

**معادلة العمودي:**  $ص = (1 - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(س - \frac{\pi}{4})$  **أى إن:**  $ص = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}س + \frac{\pi}{16}$

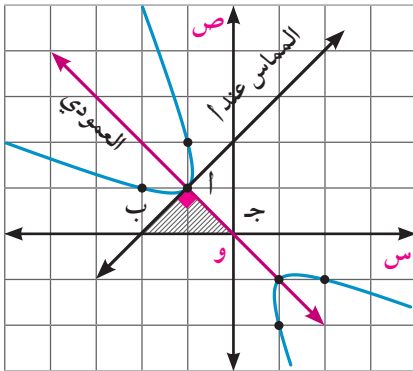
٤ حاول أن تحل

١ أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى  $ص = 3 + قاس$  عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السيني يساوى  $\frac{\pi^2}{3}$

مثال حساب المساحة

٢ أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى  $ص = 3س + 2$  عند النقطة  $أ(1, 1)$  ، وإذا قطع محور السينات فى النقطتين ب ، ج احسب مساحة المثلث أ ب ج بالوحدات المربعة

الحل



∴  $ص = 3س + 2$  ، ميل المماس =  $3$  ، ميل العمودي =  $-\frac{1}{3}$

النقطة  $أ(1, 1)$  تحقق معادلة المنحنى فهى تقع عليه باشتقاق طرفى معادلة المنحنى بالنسبة إلى س لإيجاد ميل المماس عند أى نقطة

∴  $ص = 3س + 2$  ، ميل المماس =  $3$  ، ميل العمودي =  $-\frac{1}{3}$

عند النقطة  $أ(1, 1)$  :  $1 = \frac{ص}{3س}$  ∴  $3 = \frac{ص}{س}$

∴ ميل المماس =  $3$  ، ميل العمودي =  $-\frac{1}{3}$

**معادلة المماس:**  $ص = 1 + 3(س - 1)$  **أى**  $ص = 3س - 2$

**معادلة العمودي:**  $ص = 1 - (س + 1)$  **أى**  $ص = -س$

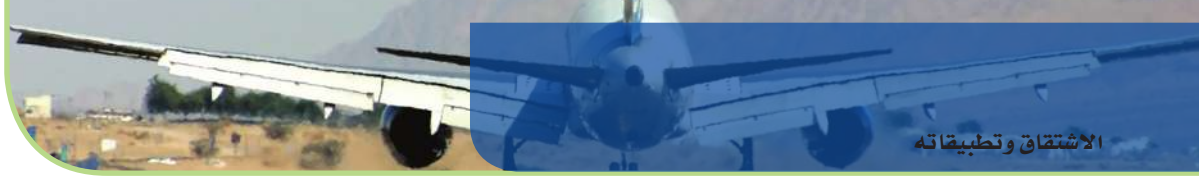
بحل معادلتى المماس والعمودي مع معادلة محور السينات  $ص = 0$  لإيجاد نقط التقاطع ب ، ج

∴ النقطة ب  $(0, 2)$  ، النقطة ج  $(0, 0)$  ويكون ب ج =  $2 - 0 = 2$

مساحة المثلث أ ب ج =  $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$  وحدة مربعة

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودي للمنحنى  $ص = 3س + 2$  عند النقطة  $(3, 1)$



## مثال

### اشتقاق بارامتری

٣ المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما  $s = 2 + n^2$  ،  $v = 1 + n^3$  أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى عند  $n = 1$

### الحل

ميل المماس عند أى نقطة  $\frac{ds}{dv} = \frac{v}{s}$  حيث :

$$\frac{ds}{dv} = \frac{2n}{3n^2} = \frac{2}{3n} = \frac{2}{3} \text{ عند } n = 1$$

عند  $n = 1$  ميل المماس  $\frac{3}{2}$  ، ميل العمودى  $-\frac{2}{3}$  ،  $\therefore s = 2 + 1^2 = 3$  ،  $v = 1 + 1^3 = 2$

أى إن النقطة (٣ ، ٢) تقع على المنحنى ، وعندها يكون :

معادلة المماس :  $(v - 2) = \frac{3}{2}(s - 3)$  أى  $3s - 2v - 5 = 0$

معادلة العمودى :  $(v - 2) = -\frac{2}{3}(s - 3)$  أى  $2s + 3v - 12 = 0$

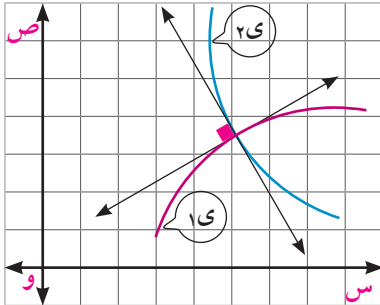
### ٤ حاول أن تحل

٣ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى  $s = \sqrt{2} + \theta$  ،  $v = \frac{\pi}{4} - \theta$  عند  $\theta = \frac{\pi}{4}$

**تفكير ناقد:** إذا كانت النقطة (١ ، ٢) إحدى نقط تقاطع المنحنيين :

$s^2 - 2 = v^2$  ،  $s = 2$  هل يتعامد مماسا المنحنيين عند هذه النقطة؟ فسر إجابتك.

**ملاحظة مهمة :** نقول إن المنحنيين ١ ، ٢ يتقاطعان على التعامد إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدين



## تمارين الدرس (١ - ٤)

١ إذا كانت د، ر، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س، أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة ق فى كل مما يأتى مستعينًا بالقيم المعطاة فى الجدول التالى:

س	د(س)	ر(س)	د'(س)	ر'(س)
٣	١	٧	١ -	٦
٧	٢ -	١	٢	٥

أ ق(س) = د(س) × ر(س)، س = ٣

ب ق(س) = د(س) ÷ ر(س)، س = ٧

ج ق(س) = د[ر(س)]، س = ٣

٢ أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند قيم س المعطاة:

أ ص = ٣ - ظ٢اس، س =  $\frac{\pi}{4}$       ب ص = ٢ جتا س - قاس، س =  $\frac{\pi}{3}$

٣ أوجد معادلتى المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط المعطاة:

أ س٢ + ص٢ = ٥٢ عند النقطة (٤، -٦)

ب س٢ + ٥س ص + ص٢ = ٧ عند النقطة (-١، ١)

ج ص٢ (١ + س) = ٨ عند النقطة (-١، ٢)

د (جاس + جتا س) ص = جتا٢ س عند س =  $\frac{\pi}{3}$

٤ أوجد معادلتى المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

أ س = ن٢ + ٤ ن، ص = ن٢ عند ن = ١

ب س = قاθ، ص = طاθ عند θ =  $\frac{\pi}{6}$

٥ إذا كانت النقطة (٤، -٢) تنتمى إلى المنحنى س٢ + ص٢ - ٢ك س + ١٢ = ٠ أوجد قيمة ك، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

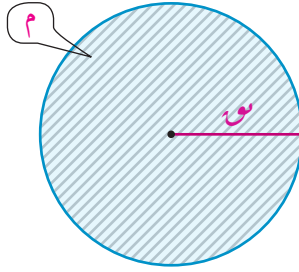
٦ **مساحة المثلث:** أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى س٢ + ٤ص٢ = ٢٠ عند النقطة (٢، ٢)

٧ **تعامد منحنيين:** أثبت أن المنحنيين (س - ١) + ص٢ = ٢، (س + ١) + ص٢ = ٢ يتقاطعان على التعامد، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع.

# المعدلات الزمنية المرتبطة

## Related Rates

### فكر و ناقش



عند تعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى زمنًا قدره (ن) ثانية  
 - هل يتغير طول نصف قطرها (ن) بتغير الزمن (ن)؟  
 - هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير الزمن (ن)؟  
 - هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير طول نصف قطرها (ن)؟ فسر إجابتك.

### لاحظ أن :

- ١ - المتغيرين م ، ن كلاهما يتغير بتغير الزمن (دالة في الزمن) وتربطهما العلاقة  $\pi r^2 = M$  أى أن :  $M = \pi r^2$
- ٢ - اشتقاق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة للزمن يؤدي إلى معادلة جديدة تربط بين المعدل الزمني لتغير كل منهما وتعرف بمعادلة المعدلات المرتبطة
- ٣ - المعدل الزمني يكون موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن، ويكون سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

$$\text{حيث : } \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \pi \times \frac{dr}{dt} \times 2r$$

**تعبير شفهي :** أى المعدلات التالية يكون موجبًا؟  
 (تمدد - انكماش - اقتراب - تباعد - صب - تسرب - انصهار - تراكم - تناقص - تزايد)

### نفخ البالون

### مثال

- ١ بالون كسري عند ملئه بالغاز كان معدل الزيادة في حجمه  $\pi$  سم<sup>٣</sup>/ث عندما كان طول نصف القطر ٤ سم. أوجد في هذه اللحظة:  
 أ) معدل زيادة طول نصف القطر.  
 ب) معدل الزيادة في المساحة السطحية.

### الحل

بفرض أن حجم البالون (ح) وطول نصف القطر (ن)، ومساحة سطح البالون (م) دوال قابلة للاشتقاق في ن.

### سوف تتعلم

- مفهوم المعدلات الزمنية المرتبطة
- طرق حل معادلات المعدلات الزمنية المرتبطة
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية

### المصطلحات الأساسية

- معدل Rate
- معدلات مرتبطة Related Rates

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

تحديد المتغيرات وتسميتها

رسم تخطيطي للمدخلات

إيجاد علاقة الارتباط

اشتقاق العلاقة بالنسبة للزمن

التعويض عن القيم لإيجاد المعدل المطلوب

$$\text{أ} \quad \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \quad \text{باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن}$$

$$(1) \quad \frac{\frac{\pi}{3} \text{ م}}{\frac{\pi}{3} \text{ م}} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م}$$

$$\text{ب} \quad \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \quad \text{باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن}$$

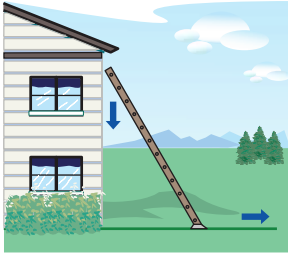
$$(2) \quad \frac{\frac{\pi}{3} \text{ م}}{\frac{\pi}{3} \text{ م}} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م} = \frac{\pi}{3} \text{ م} \times \frac{\pi}{3} \text{ م}$$

### ٩ حاول أن تحل

١ الحجم: مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/د، وتزداد مساحة سطحه في لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم<sup>٢</sup>/د، أوجد طول حرف المكعب في هذه اللحظة ومعدل الزيادة في حجمه حينئذ.



### مثال حركة السلم

٢ يستند سلم طوله ٢٥٠ سم على حائط رأسي، فإذا انزلق الطرف العلوي للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ١٠ سم/ث عندما يكون الطرف السفلي للسلم على بعد ٧٠ سم من الحائط. أوجد:

أ معدل انزلاق الطرف السفلي للسلم.

ب معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض.

### الحل

أ نفرض أن: ص المسافة بين الطرف العلوي للسلم والأرض،

س المسافة بين الطرف السفلي للسلم والحائط الرأسي.

$$(1) \quad \text{من نظرية فيثاغورث} \quad \text{ص}^2 + \text{س}^2 = (250)^2$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

$$(2) \quad \frac{\text{ص}}{\text{ث}} + \frac{\text{س}}{\text{ث}} = 0 \quad \therefore \frac{\text{ص}}{\text{ث}} = -\frac{\text{س}}{\text{ث}}$$

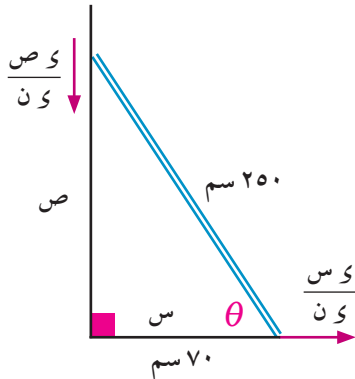
∴ الطرف العلوي ينزلق أسفل الحائط فإن ص تتناقص

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{ث}} = -\frac{\text{س}}{\text{ث}}$$

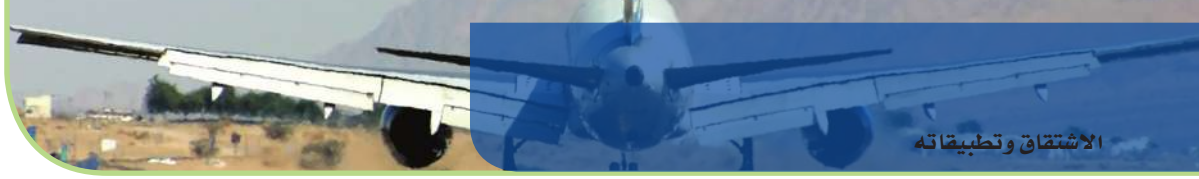
عند س = ٧٠ سم ومن المعادلة (١) نجد أن: ص = ٢٤٠ سم

بالتعويض في المعادلة (٢) ينتج أن:  $\frac{\text{ص}}{\text{ث}} = -\frac{\text{س}}{\text{ث}} = -\frac{70}{240} = -\frac{7}{24}$  سم/ث

أي إن الطرف السفلي للسلم ينزلق مبتعدًا عن الحائط بمعدل  $\frac{7}{24}$  سم/ث







ب) نفرض أن:  $\theta$  قياس زاوية ميل السلم على الأرض

جا  $\theta = \frac{ص}{٢٥٠}$  باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

$$\therefore \text{جنا } \theta \frac{ص}{ن} = \frac{١}{٢٥٠} \frac{ص}{ن} \quad \text{لكن } \frac{ص}{ن} = \frac{١٠٠}{١٠} \text{ ث عند } ص = ٧٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{١}{٧} - \frac{١}{١٠} = \frac{\theta}{ن} \quad \therefore ١٠٠ \times \frac{١}{٢٥٠} = \frac{\theta}{ن} \times \frac{٧٠}{٢٥٠}$$

أي إن قياس الزاوية يتناقص بمعدل  $\frac{١}{٧}$  زاوية نصف قطريه / ث

٩ حاول أن تحل

٢ حركة سلم: يرتكز سلم بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسى. إذا انزلق الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/ث، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوى  $\frac{\pi}{٣}$

تفكير ناقد: انطلق صاروخ كتلته ١٥ طنًا وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت ٢٠٠ كجم/ث، ما كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من لحظة إطلاقه؟

ملاحظة مهمة: إذا كانت س. القيمة الابتدائية للمتغير س (عند ن = ٠)،  $\frac{ص}{ن}$  معدل تغير س بالنسبة للزمن،

س قيمة المتغير بعد زمن ن فإن: س = س. +  $\frac{ص}{ن} \times ن$

فى بند تفكير ناقد السابق استخدم العلاقة  $ك = ك. + \frac{ص}{ن} \times ن$  لتتحقق من صحة إجابتك.

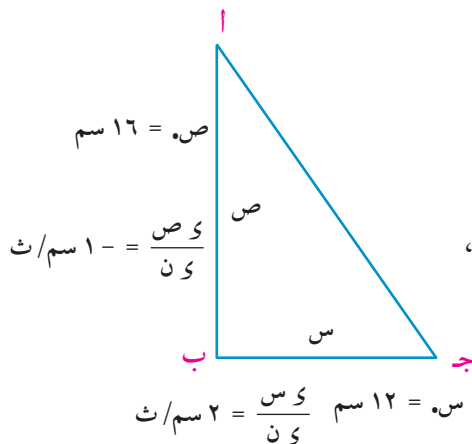
المساحة

مثال

٣ مثلث قائم الزاوية طولاً ضلعى القائمة ١٢ سم، ١٦ سم، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ٢ سم/ث وكان طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/ث.

أ) أوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٢ ث

ب) متى يصبح هذا المثلث مثلثًا متساوى الساقين؟



الحل

أ) نفرض أن س، ص طولاً ضلعى القائمة بعد زمن قدره ن ثانية،

م مساحة المثلث حينئذ حيث س، ص، م دوال فى الزمن:

$$\therefore س = ١٢ + ٢ ن، ص = ١٦ - ن$$

$$م = \frac{١}{٢} س \times ص = \frac{١}{٢} (١٢ + ٢ ن) (١٦ - ن)$$

م = (٦ + ن) (١٦ - ن) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$$\therefore \frac{م}{ن} = (٦ + ن) (١ - ١) + (١٦ - ن) (-١) = -١٠ - ٢ ن \text{ سم}^٢/\text{ث}$$

عند ن = ٢ ث  $\therefore$  معدل تغير مساحة المثلث =  $١٠ - ٢(٢) = ٦ \text{ سم}^٢/\text{ث}$

ب) عندما  $s = 12 + n - 16 = n - 4$  .  $\therefore n = \frac{4}{3}$  ث  
 أى أن بعد  $\frac{4}{3}$  ث يصبح المثلث القائم مثلثاً متساوئ الساقين

 حاول أن تحل

٣ **الحجم:** جسم معدني على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١سم/د وارتفاعه يتناقص بمعدل ٢سم/د. أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥سم وارتفاعه ٢٠سم، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازي المستطيلات عن الزيادة.

مثال  طول الظل

٤ يسير رجل طوله ١,٨ متر فى خط مستقيم مقترباً من قاعدة عمود إضاءة بمعدل ٢, ١ متر/ث، فإذا كان ارتفاع مصباح عمود الإضاءة ٤, ٥ متراً عن سطح الأرض أوجد:

أ معدل تغير طول ظل الرجل.

ب) معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤,٨ متراً من عمود الإضاءة.

الحل 

**نمذجة المشكلة:** في الشكل المقابل تمثل  $\overline{AB}$  عمود الإضاءة، النقطة

المصباح وتمثل  $\overline{\text{هـ}}$  الرجل، والنقطة ج نهاية ظل الرجل فيكون:

س = هـ ب      بعد الرجل عن قاعدة عمود الإضاءة.

ص = هـ جـ      طول ظل الرجل.

ف = أء بُعد رأس الرجل عن المصباح.

**أولاً:**  $\Delta$  أب ج  $\sim \Delta$  و ه ج

$$\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} = \frac{0,4}{1,8} = \frac{\text{ب ج}}{\text{هـ ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{و هـ}} \therefore$$

ويكون ٢ ص = س      باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$$\therefore \frac{٢ \text{ ص}}{\text{ن}} = \frac{٥ \text{ ص}}{\text{ن}} \quad \text{أى} \quad \frac{١,٢-}{٢} = \frac{٥ \text{ ص}}{\text{ن}} = ٠,٦ \text{ متر/ث}$$

**ثانيًا:** في  $\Delta$  أ، ب و القائم الزاوية في (و)

$$F^2 = S^2 + (3, 6)^2 \quad \text{باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى } n$$

$$2 \text{ ف} = \frac{2 \text{ ف}}{\text{ن}} = \frac{2 \text{ س}}{\text{ن}} = \text{عندس} = 4,8 \text{ م} \quad \text{ف} = 6 \text{ متر}$$

$$٦ \frac{\text{ف}}{\text{ن}} = ٤,٨ \times ١,٢ \quad \text{أى} \quad \frac{\text{ف}}{\text{ن}} = ٥,٧٦ \text{ متر/ث}$$

**حاول أن تحل**

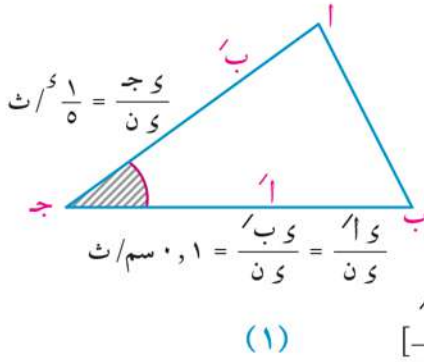
٤ **إنشاءات:** ماسورة مياه طرفها أ، ب، وطولها ٥ أمتار، تستند بطرفها أ على أرض أفقية ويأخذى نقطتها ك على سور رأسى ارتفاعه ٣ أمتار. فإذا انزلق الطرف أ مبتعدًا عن السور بمعدل  $\frac{5}{4}$  متر/د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما تصل إلى حافة السور.

## المساحة

## مثال

٥ ضلعان في مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل ١ سم/ث، ويتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل  $\frac{1}{5}$  راديان/ث. بأي معدل تتغير مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠ سم.

## الحل



**نمذجة المشكلة:** نفرض أن عند لحظة زمنية  $t$  يكون طول أحد

ضلعى المثلث  $A$  وطول الآخر  $B$  وقياس الزاوية المحصورة بينهما

جـ  $\theta$ ، مـ مساحة المثلث  $A B$  جدوال قابلة للاشتقاق في  $t$

حيث  $M = \frac{1}{2} A B \sin \theta$  باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى  $t$

$$\therefore \frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \left[ A \frac{dB}{dt} \sin \theta + B \frac{dA}{dt} \sin \theta + A B \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \left[ A \frac{dB}{dt} \sin \theta + B \frac{dA}{dt} \sin \theta + A B \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$\text{لكن } \frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = 1, \theta = \frac{\pi}{5}, \therefore \frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \left[ 10 \times 10 \times \sin \frac{\pi}{5} + 10 \times 10 \times \cos \frac{\pi}{5} \times \frac{1}{5} \right]$$

وعندما يكون طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠ سم يكون المثلث متساوى الأضلاع

فإن  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ، جتا  $\theta = \frac{1}{2}$  بالتعويض فى المعادلة (١)

$$\therefore \frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{1}{2} \right] = \frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{4} + 10 \right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + 5 \approx 5.866 \text{ سم}^2/\text{ث}$$

أى مساحة المثلث تتزايد عند هذه اللحظة بمعدل ٥,٨٦٦ سم<sup>٢</sup>/ث

## ٦ حاول أن تحل

٥ **المساحة:**  $A B$  جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ، مساحته ثابتة وتساوى ٢٤ سم<sup>٢</sup>، إذا كان معدل تغير  $B$  يساوى

١ سم/ث فأوجد معدل تغير كل من  $A$ ، و  $\theta$  (أ) عند اللحظة التي يكون فيها  $B$  يساوى ٨ سم.

**تفكير ناقد:** إذا كان  $S$  (قياس زاوية بالتقدير الدائرى) يتزايد بمعدل زمنى ثابت، فسر لماذا:

أ عند  $S = 0$

ب يتزايد الجيب والظل بنفس المعدل

ج عند  $S = \frac{\pi}{3}$

د يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب

هـ عند  $S = \frac{\pi}{6}$

و يتناقص جيب التمام بمعدل  $\frac{3}{8}$  مرة قدر تزايد الظل

## الربط بالفيزياء

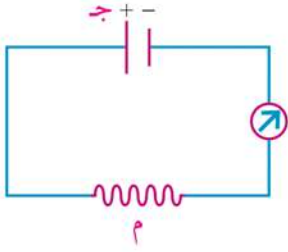
## مثال

٦ فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كان جـ فرق الجهد (فولت)،  $I$  شدة التيار (أمبير)،  $R$  المقاومة (أوم) وتزايد

فرق الجهد بمعدل ١ فولت/ث، وتناقص شدة التيار بمعدل  $\frac{1}{4}$  أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة فى اللحظة التي

يكون فيها جـ = ١٢ فولت،  $I = ٢$  أمبير.

الحل



تعلم أن ج = ت × م باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

$$\therefore \frac{ج}{ن} = \frac{ت}{ن} \times \frac{م}{ن} + \frac{م}{ن} \times \frac{ت}{ن}$$

$$\therefore \frac{ج}{ن} = \frac{ت}{ن} \times ١ + \frac{ت}{ن} \times \frac{١}{٢} \text{ أمبير / ث}$$

$$\therefore \text{عند ج} = ١٢ \text{ فولت ، ت} = ٢ \text{ أمبير فإن : م} = \frac{ج}{ت} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ أوم}$$

$$\text{ويكون ١} = \frac{ج}{ن} = \frac{١٢}{ن} \times ٢ + \frac{١}{٢} \times ٦ \text{ أوم / ث} \therefore \frac{١}{٢} \times ٦ + \frac{٢}{ن} \times ١٢ = ١$$

أي إن معدل تغير المقاومة في هذه اللحظة ٢ أوم / ث

٥ حاول أن تحل

٦ في المثال السابق احسب معدل تغير المقاومة إذا كان التيار يتزايد بمعدل  $\frac{١}{٣}$  أمبير / ث.

### تمارين الدرس (١ - ٥)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل  $\frac{٤}{\pi}$  سم / ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل:

- أ  $\frac{٤}{\pi}$  سم / ث      ب  $\frac{\pi}{٤}$  سم / ث      ج  $\frac{١}{٨}$  سم / ث      د ٨ سم / ث

٢ ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم<sup>٣</sup> / ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون

حجمه ٨ سم<sup>٣</sup> هو: ..... سم / ث

- أ  $\frac{١}{١٢}$       ب  $\frac{١}{١٢}$       ج  $\frac{١}{٦}$       د  $\frac{١}{٦}$

٣ جسم يتحرك على المنحنى ص = ٢ س<sup>٣</sup> ، إذا كان  $\frac{ج}{ن} = \frac{١}{٢}$  وحدة / ث عند ص = ١ فإن  $\frac{ج}{ن}$  عند هذه

اللحظة يساوي ..... وحدة / ث

- أ  $\frac{٣}{٤}$       ب  $\frac{٣}{٨}$       ج  $\frac{٣}{٤}$       د  $\frac{٣}{٢}$

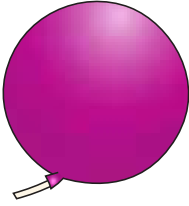
٤ إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما =  $\frac{١}{٢}$  وكان الإحداثي السيني لهذه النقطة يتناقص بمعدل

٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادي يساوي ..... وحدة / ث

- أ  $\frac{١}{٦}$       ب  $\frac{٣}{٢}$       ج  $\frac{١}{٦}$       د  $\frac{٣}{٢}$

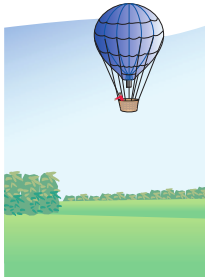
أجب عما يأتي:

- ٥) تتحرك نقطة على منحنى معادلته  $s^2 + 2s - 4 = 8 - 6 = 0$  فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (٣، ١) يساوي ٤ وحدات / ث، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن ن.
- ٦) سقط حجر في بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤ سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة في نهاية ٥ ثوانٍ.
- ٧) صفيحة على شكل سداسي منتظم تنكمش بالبرودة، وُجِدَ أن معدل تغير طول ضلعها ١، ٠ سم/ث، أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم.
- ٨) كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢ سم<sup>٣</sup>/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم / سم<sup>٢</sup> عندما يكون الحجم ٢٥٠ سم<sup>٣</sup>. أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠ سم<sup>٣</sup>.

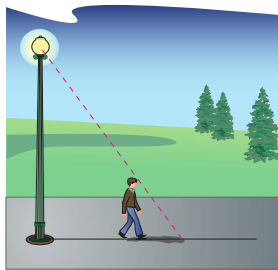


- ٩) يتسرب غاز من بالون كرى بمعدل ٢٠ سم<sup>٣</sup>/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره ١٠ سم، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجي للبالون في نفس اللحظة.

- ١٠) سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية، إذا تحرك الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ سم/د عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض عند هذه اللحظة.



- ١١) يرتفع بالون رأسياً لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب في نفس المستوى الأفقى للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها  $\frac{\pi}{4}$  وتتزايد بمعدل ١٢، ٤٠ / د، أوجد معدل ارتفاع البالون في هذه اللحظة.



- ١٢) يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ٢، ١ م/ث، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها  $\theta$  عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س متراً فأثبت أن  $\frac{1}{s} = \tan \theta$ ، ثم أوجد معدل تغير  $\theta$  عندما يبعد الرجل مسافة ٣، ٦ متر عن قاعدة المصباح.

- ١٣) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٢٠، ٣. إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ساعة، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة.





## ملخص الوحدة

### مشتقات الدوال المثلثية Derivative of trigonometric function

المشتقة	الدالة
جتا س	دالة الجيب جاس
- جاس	دالة جيب التمام جتا س
قا <sup>2</sup> س	دالة الظل ظاس
- قتا <sup>2</sup> س	دالة ظل التمام ظتا س
قاس ظاس	دالة القاطع قاس
- قتا س ظتا س	دالة قاطع التمام قتا س

### الاشتقاق الضمني Implicit Defferentiation

اشتقاق العلاقة الضمنية د(س، ص) = ٠ يتطلب اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقاً لقاعدة السلسلة لنحصل على  $\frac{دص}{دس}$  أو  $\frac{دس}{دص}$  على الترتيب.

### الاشتقاق البارامترى Parametric Defferentiation

المنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د(ن)، ص = ر(ن) يكون  $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دس}{دن}$  حيث د، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن

### المشتقات العليا للدالة higher Derivatives of a function

إذا كانت ص = د(س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فتسمى المشتقات بدءاً من المشتقة الثانية (إن وجدت) بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز  $\frac{د^2ص}{دس^2}$  أو ص'' والمشتقة الثالثة بالرمز  $\frac{د^3ص}{دس^3}$  أو ص''' والمشتقة النونية بالرمز ص<sup>(ن)</sup> أو  $\frac{د^نص}{دس^ن}$  أو د<sup>(ن)</sup>(س) حيث ن عدد صحيح موجب.

### معادلتا المماس والعمودى لمنحنى equation of the tangent and the normal to a curve

إذا كان م ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) الواقعة عليه فإن:  
معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) هي: ص - ص<sub>١</sub> = م (س - س<sub>١</sub>)  
معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) هي: ص - ص<sub>١</sub> = -  $\frac{١}{م}$  (س - س<sub>١</sub>)

### المعدلات الزمنية المرتبطة Related Rates

إذا كانت ص = د(س)، س تتغير تبعاً لتغير الزمن ن، فإن ص تتغير أيضاً تبعاً لتغير الزمن ن أى إن ص دالة الدالة في الزمن ن ويكون  $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$  وتربط هذه العلاقة المعدل الزمني لتغير س بالمعدل الزمني لتغير ص.  
يكون المعدل موجباً إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن.  
يكون المعدل سالباً إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.



## تمارين عامة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

① إذا كان  $v = c$  فإن  $v / (\frac{\pi}{\epsilon})$  يساوي:

- أ - ٨      ب - صفر      ج -  $\sqrt[2]{4}$       د - ١٦

۲) إذا كان ص = جا ۲ س جتا ۲ س فإن ص  $\parallel (\frac{\pi}{3})$  يساوى:

- أ - ٤      ب - صفر      ج -  $\sqrt[3]{4}$       د - ٨

٣) تتحرك نقطة على المنحنى  $S$  من  $12 = 2$  ، عند النقطة (٣، ٢) يكون  $\frac{ds}{dt}$  يساوي:

- ١ -  $\frac{3}{2}$       ٢ -  $\frac{2}{3}$       ٣ -  $\frac{1}{2}$       ٤ -  $\frac{3}{4}$

٤ إذا كان  $v = 2^3 + 7$  ،  $e = 2^4 - 4$  ، فإن معدل تغير  $v$  بالنسبة إلى  $e$  يساوي:

- أ ٢٢      ب ٣٣      ج ٦      د ١٢

۵) يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل  $2$  سم/د ومساحتها بمعدل  $20\pi$  سم<sup>2</sup>/د، فإن طول نصف قطرها عند هذه

اللحظة يساوي: ..... سم

۲. ۵                      ۱. ۷                      ۰. ۶                      ۰. ۱

**أُجِبَ عما يَأْتِي:**

٦) أوجد  $\frac{r}{s}$  إذا كانت  $s$  تساوي :

- اُ س + ظتا ۲ س      ب  $\sqrt{s}$  س + قا ۵ س      ج ۲ س - ۵ جتا ( $\pi$  س) ۲
- د ۲ جتا ( $\pi$  س + ۱)      ه ظا س ظتا س      و قا ۲ س ظا ۲ س

٧ في الشكل المقابل: أنقطة تتحرك في المستوى،  $\overline{AB}$  مماس للدائرة  $m$  عند

ب، أم = س + ح حيث ح طول نصف قطر الدائرة:

- أ) أثبت أن  $s = \mu(\theta - 1)$

ب) أوجد معدل تغير  $s$  بالنسبة إلى  $\theta$  عندما  $\frac{\pi}{6} = \theta$

٨ أوجد  $\frac{z}{s}$  في أبسط صورة لكل من:

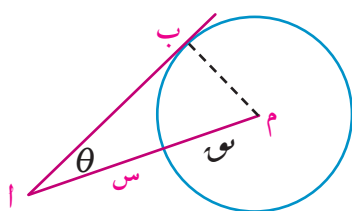
- ا.  $س^۲ - ۳ص + ۹ = ۰$       ب.  $۵س^۲ + ۱۲ص - ۷ = ۰$       ج.  $س^۲ - ۲س + ۲ص + ۱۴ = ۰$

- ۵)  $25 = (س - ۳) + (ص + ۲)$       ۹) جاس جتا ص  $\frac{1}{۲} =$

٩ أوجد معدل تغير  $(س + ٣)(س - ٢)$  بالنسبة إلى  $\frac{س - ٣}{س + ٢}$

- ب) إذا كانت د(س) =  $\frac{2}{1+s}$  ، ر(س) =  $s^3$

أوجد  $\frac{r}{s} [(d \circ r)(s)]$  عند  $s = 2$



١٠ أ إذا كانت  $\sqrt{5} = 2س + ٥$  أثبت أن  $(2س + ٥) = \frac{ص^3}{س} + \frac{ص^2}{س} + ٣ = \frac{ص^2}{س}$  .

ب إذا كانت :  $ص = جا أ س$  أثبت أن  $س = \frac{ص^2}{س} + \frac{ص}{س} + ٢ = \frac{ص}{س} + ٢ + \frac{ص^2}{س} = ٢ + ٢س + ص$  .

ج إذا كانت  $ص = ١ جتا س^2 + ٢ جا س^2$  أثبت أن :  $س = \frac{ص^2}{س} - \frac{ص}{س} + ٤س = ص^3$  .

١١ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة:

أ  $س^2 - س ص \sqrt{3} + ٢ص^2 = ١٢$   $(\sqrt{3}, ٣)$

ب  $س جا ٢ ص = ص جتا ٢ س$   $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

١٢ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

أ  $س = ٢ن + ٢ + ٣$  ،  $ص = ٢ن^3 - ٦ن + ١$  عند  $ن = ٠$

ب  $س = ٢قا - \theta$  ،  $١ - \theta = ص$  عند  $\theta = \frac{\pi}{4}$

١٣ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات، المماس، العمودى عليه للمنحنى  $٤س^2 + ص^2 = ٢٠$  عند النقطة  $(١, -٤)$ .

١٤ أثبت أن المنحنيين  $ص^4 + ٩ص = ٦س$  ،  $س^2 - ٢ص = ٣س$  متقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل.

١٥ أثبت أن المنحنى  $(\frac{ص}{س})^٢ + (\frac{س}{ص})^٢ = ٢$  يمس المستقيم  $\frac{ص}{ب} + \frac{س}{ا} = ٢$  عند النقطة  $(١, ب)$  مهما تكن قيمة ن.

١٦ إذا تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت العلاقة بين المسافة والزمن هى  $٣ن^3 + ٢ن - ٤$  حيث ف بالسنتيمترات، ن بالثوانى . أوجد معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن فى نهاية ٣ ثوانٍ.

١٧ بالون كروي مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل  $٣سم^3/ث$  ، أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره  $١٠سم$  يساوى  $\frac{٢سم^2}{ث}$ .

١٨ نقطة تتحرك على المنحنى  $ص^2 = ٤س$  إذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة  $(٤, -٤)$  يساوى ٢ وحدة/ث فأوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

١٩ مستطيل طوله  $٢٤سم$  وعرضه  $١٠سم$  يتناقص طوله بمعدل  $٢سم/ث$  ، بينما يتزايد عرضه بمعدل  $٥سم/ث$  ، أوجد معدل تغير مساحته بعد مضي ٤ ثوانٍ، ثم أوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن التزايد . كم تكون مساحة المستطيل حينئذ؟

٢٠ سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوى على حائط رأسى بمعدل  $١ ك وحدة / ث$  ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلى عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية  $\theta$  حيث  $\theta = \frac{\pi}{4}$  .

٢١ يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل  $١سم^3/ث$  ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوى  $٠,١سم/ث$  فأوجد طول ضلع قاعدته.

٢٢ سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية. إذا كان طرفه السفلى يتحرك مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ متر/د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط . أوجد معدل تحرك طرفه العلوى ومعدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ.

٢٣ متوازي مستطيلات أبعاده ٣، ٤، ١٢ من السنتيمترات إذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢سم/ث ومعدل تزايد بعده الثانى ١سم/ث، ومعدل تناقص بعده الثالث ٣ سم/ث ، فأوجد حجم متوازي المستطيلات فى أى لحظة زمنية ن. ومعدل تغير حجمه فى نهاية ٢ ثانية .

٢٤ خزان بترول على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢٤ متراً. يُراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢م³/د، فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان؟

٢٥ ترتفع طائرة عمودية رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م/د فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض ويبعد ١٥٠ م عن موقع إقلاعها، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون على ارتفاع ١٥٠ م من سطح الأرض.

٢٦ فى سباق ١٠٠ متر، يجرى لاعب فى مسار مستقيم باتجاه خط النهاية، وكانت إحدى كاميرات خط النهاية على مسافة ٥ أمتار وعمودية على مسار السباق وفى نفس المستوى الأفقى للمتسابقين . أوجد معدل تغير الزاوية التى تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ومعدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠م/ث.

٢٧ تتحرك النقطة أ (س، ص) على منحنى الدالة  $ص = س^3 + س$  بحيث  $\frac{ص}{س} = ٢$  وحدة / ث أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة ب (٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الإحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣.

## اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) إذا كانت د(س) = ظلّتا س فإن د(  $\frac{\pi}{4}$  ) تساوى :  
 أ)  $\frac{4}{9}$       ب)  $\frac{4}{9}$       ج) ٤      د)  $\frac{9}{4}$
- ٢) تتحرك نقطة على المنحنى ص = ٢ - ٢٥ س بحيث  $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٣+س}$  فإن: عند النقطة (٣، ٤)،  $\frac{ص}{س}$  تساوى:  
 أ)  $\frac{١}{4}$       ب)  $\frac{١}{4}$       ج)  $\frac{١}{9}$       د) ٩
- ٣) إذا كان معادلة العمودى للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (١، ١) هى س + ٤ = ٥ فإن د(١) تساوى:  
 أ) ٣ -      ب)  $\frac{١}{4}$  -      ج) ٤      د) ٤ -
- ٤) المماس للمنحنى ص = ٣س - ٥ عند النقطة (١، ٢) يمر بالنقطة:  
 أ) (٢، ٥)      ب) (١، ٣)      ج) (٤، ٢)      د) (٨، ٠)

أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٥) إذا كانت س = ن - ٢، ص = ن - ٣ أوجد  $\frac{ص}{س}$   
 ٦) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما س = ن - ٢، ص = ٨ - ن أوجد معادلة المماس للمنحنى عند ن = ٦  
 ٧) أوجد معدل تغير  $\sqrt{٩ + س}$  بالنسبة إلى س عند س = ٤ -  
 ٨) أ) إذا كان ص = ٤ + ظلّتا س - قاس ٢س، أوجد معادلة العمودى عند س =  $\frac{\pi}{4}$   
 ب) مُثمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم و يتزايد بمعدل ٢ سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.  
 ١٠) سلم طوله ٤ أمتار يتركز بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية، فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢٠ سم/ث . احسب معدل هبوط الطرف العلوى للسلم عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها  $\frac{\pi}{3}$ .

إذا لم تستطع الإجابة عن أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
أرجع إلي	٣	٢	٤	٤	٢	٢	٢	٤	٥



# الوحدة الثانية

## تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

The Calculus of Exponential and Logarithmic Functions

### مقدمة الوحدة

في هذه الوحدة، نتعرف العدد النيبيري هـ نسبةً إلى العالم الاسكتلندي جون نابيير Johan napier (١٥٥٠ - ١٦١٧م) الذي أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات، كما يسمى أيضاً عدد أولير Euler تكريماً للعالم الذي درسه باستفاضة هو والدوال المرتبطة به واكتشافه للعلاقة هـ  $1 + \pi i = 0$  بين أهم خمسة ثوابت في الرياضيات والتي تربط بين الدوال المثلثية والدوال الأسية والأعداد المركبة.

والعدد هـ عدد حقيقي غير نسبي يساوي تقريباً ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨٤٥٩ له أهمية كبيرة في الرياضيات، حيث اتخذ أساساً للدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي هـ  $[exp(x)]$ ، ودالة اللوغاريتم الطبيعي لو  $[ln(x)]$  وسوف نتناول في هذه الوحدة دراسة كل من هذه الدوال ومشتقاتها وكذلك مشتقاتها العكسية (التكامل) مع استخدام البرامج الرسومية لحل مشكلات رياضية وحياتية في مجالات مختلفة.

### مخرجات التعلم

في نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:

- ✦ يتعرف بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي مثل:
  - ✦ لو  $s = ص$   $\Leftrightarrow$  هـ  $ص = س$
  - ✦ هـ لو  $s = س$  ،  $س < ٠$
  - ✦ لو هـ  $= ١$  ، لو  $s = \frac{ل}{لوا}$
- ✦ يوجد مشتقات الدوال الأسية  $ص = هـ س$  ،  $ص = |س|$  ، ومشتقة الدالة اللوغاريتمية  $ص = لو س$  ،  $ص = لو س$
- ✦ تكامل الدوال  $ص = هـ س$  ، لو  $س$
- ✦ يتعرف مفهوم العدد النيبيري هـ من خلال النهايات
  - ✦  $نبا (س + ١) = \frac{١}{س}$  هـ ،  $نبا (\frac{١}{س} + ١) = س$  هـ
  - ✦ يوجد بعض النهايات التي تؤول إلى العدد هـ ومضاعفاته
    - ✦  $نبا (\frac{١}{س} + ١) = س^2$  هـ ،  $نبا (\frac{١}{س} + ١) = س^2$  هـ
  - ✦ يتعرف مفهوم اللوغاريتم الطبيعي لو من خلال النهاية
    - ✦  $نبا \frac{١}{س} = \frac{١}{س}$  هـ



## المصطلحات الأساسية

Antiderivative	المشتقة العكسية	Exponential Equation	معادلة أسية	Exponent	أس
Integration	تكامل	Logarithm	لوغاريتم	Power	قوة
Arbitrary constant	ثابت اختياري	Form	صورة	Base	أساس
Indefinite integral	تكامل غير محدد	Common Logarithm	لوغاريتم معتاد	Rational Exponents	أسس كسرية
		Natural Logarithm	لوغاريتم طبيعي	Exponential Growth	نمو أسي
		Napier`s Constant	ثابت نابيير	Exponential Decay	تضاؤل أسي
		Logarithmic Differentiation	تفاضل لوغاريتمي	Exponential Function	دالة أسية

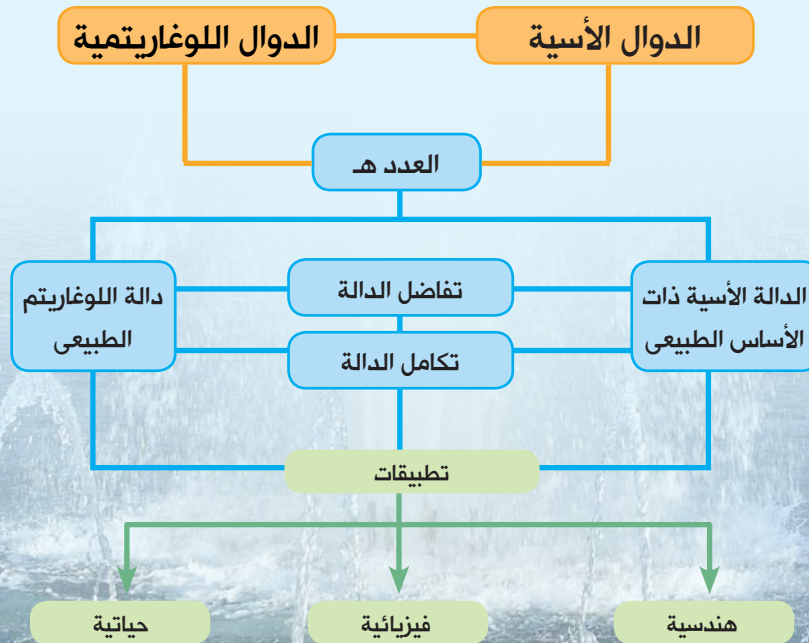
## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

## دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي.
- الدرس (٢ - ٢): مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- الدرس (٢ - ٣): تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.

## مخطط تنظيمي للوحدة



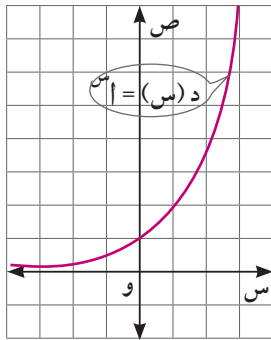


# الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي

١ - ٢

## Natural Exponential and Logarithmic Functions

### استكشف



سبق أن درست الدالة الأسية:  $d(s) = e^s$   
حيث  $s \geq 0$ ،  $e \geq 1$  وعلمت أن منحناها يمر  
بالنقط  $(0, 1)$ ،  $(1, e)$ ،  $(-1, \frac{1}{e})$   
هل جميع منحنيات الدوال الأسية تمر بالنقطة  $(0, 1)$ ؟  
فسر إجابتك.  
إذا مرَّ منحنى الدالة الأسية  $d$  بالنقطة  $(1, 3)$ ، ما قيمة  
الأساس  $a$ ؟

The number e

العدد هـ

يُعرف العدد هـ من العلاقة:  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = e$

ارسم منحنى الدالة  $d$  حيث  $d(s) = e^s$  أى  $f(x) = \exp(x)$  مستخدمًا برنامج geogebra  
أو أى برنامج رسومي آخر. هل تستطيع اكتشاف قيمة تقريبية للعدد هـ؟

س	$\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s$
٢	$2, 25 = 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$
١٠	
١٠٠	
١٠٠٠	
١٠٠٠٠	
١٠٠٠٠٠	

استكشف  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s$  مستخدمًا حاسبة

الجيب فى إكمال الجدول المقابل.

هل تقترب هذه النهاية من القيمة التقريبية  
السابق تعيينها للعدد هـ؟ ماذا تستنتج؟

هل  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = e$ ؟  
فسر إجابتك

لاحظ أن

(١) يمكن إيجاد قيمة هـ باستخدام حاسبة الجيب بالضغط على المفاتيح

→ ابدأ **Shift** **ln** **1** **=**

نجد أن هـ  $\approx 2, 718281828$  لأقرب ٩ أرقام عشرية

### سوف تتعلم

- مفهوم العدد النيبى هـ من خلال النهايات.
- إيجاد نهاية دالة تؤدي إلى العدد هـ ومضاعفاته.
- تعرف الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي.
- مفهوم اللوغاريتم الطبيعي من خلال النهايات.

### المصطلحات الأساسية

- الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي
- Natural Exponential
- دالة اللوغاريتم الطبيعي
- Natural Logarithmic Functions

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.
- الشبكة العنكبوتية
- ابحث عن العدد هـ ورمزه (e)
- فى الشبكة العنكبوتية لتعرف عنه المزيد.

(١)

$$(٢) \quad \therefore \text{هـ} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s$$

بفرض  $m = \frac{1}{s}$  حيث  $s \neq 0$  فإن  $m \leftarrow 0$  عندما  $s \leftarrow \infty$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = \lim_{m \leftarrow 0} \left(1 + m\right)^{\frac{1}{m}}$$

أى إن يمكن التعبير عن العدد هـ بالصورة:

$$\text{هـ} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s$$

مثال

نهايات تؤدي إلى قوى العدد هـ

١ أوجد:

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s^3}$$

$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s^3 + s}$$

الحل

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s^3} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s\right]^{s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s\right]^{s^2} = \text{هـ}^3$$

$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s^3 + s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s^3} \times \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = \text{هـ}^3 \times \text{هـ} = \text{هـ}^4$$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد:

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s^2 + s}$$

٢ أوجد:

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{s}\right)^s$$

$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s+2}{s-1}\right)^{s+4}$$

الحل

بفرض  $v = \frac{5}{s}$  حيث  $s \neq 0$  فإن  $v \leftarrow 0$  عندما  $s \leftarrow \infty$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{s}\right)^s = \lim_{v \leftarrow 0} \left(1 + v\right)^{\frac{5}{v}} = \lim_{v \leftarrow 0} \left[\left(1 + v\right)^{\frac{1}{v}}\right]^5 = \text{هـ}^5$$

$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s+2}{s-1}\right)^{s+4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s+1-1}{s-1}\right)^{s+4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{s-1}\right)^{s+4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{s-1}\right)^{\frac{s}{s-1}} \times \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{s-1}\right)^{4+s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{s-1}\right)^{\frac{s}{s-1}} \times \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{s-1}\right)^{4+s} = \text{هـ}^5 \times \text{هـ}^5 = \text{هـ}^{10}$$

## ٩ حاول أن تحل

٢ أوجد:

أ) نها  $\left(\frac{3}{s} + 1\right)$   $s \rightarrow \infty$

ب) نها  $\left(1 - \frac{1}{s}\right)$   $s \rightarrow \infty$

ج) نها  $\left(\frac{s}{s+1}\right)$   $s \rightarrow \infty$

د) نها  $\left(\frac{s^2 + 5}{1 + s^2}\right)$   $s \rightarrow \infty$

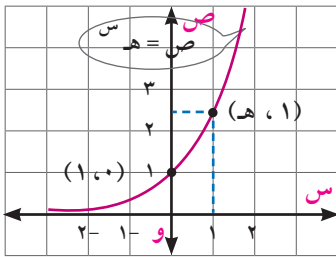
لاحظ: يمكن التعبير عن العدد هـ باستخدام (متسلسلة مكلورين) بالصورة:

$$هـ = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

## تعلم



## Natural Exponential Function



نها  $هـ = هـ$   $s \rightarrow \infty$

نها  $هـ = ص$   $s \rightarrow -\infty$

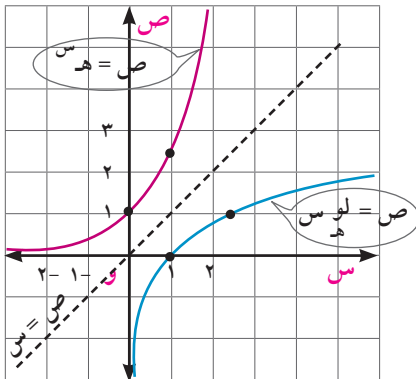
## الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي

هي دالة أسية أساسها هـ ، د(س) = هـ س ، س ∈ ع

لاحظ أن

- ١) مجال الدالة د حيث د(س) = هـ س هو ع ومداها  $[0, \infty]$
- ٢) منحنى الدالة يمر بالنقطة (١، ٠) ، (١، هـ)
- ٣) د(س) = هـ س دالة احادية (One-to-One)
- ٤) تقبل وجود دالة عكسية تعرف بدالة اللوغاريتم الطبيعي
- ٥) نستخدم الرمز  $\exp(x)$  عند رسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومي

## Natural Logarithm Function



نها لو س  $= س$   $s \rightarrow \infty$

نها لو س  $= -\infty$   $s \rightarrow 0$

## دالة اللوغاريتم الطبيعي

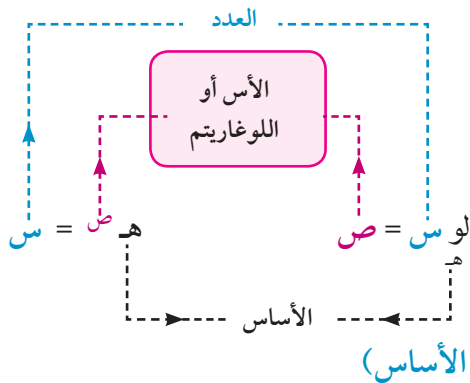
هي لوغاريتمية أساسها هـ ، د(س) = لو س ، س ∈ ع<sup>+</sup>

لاحظ أن:

- ١) مجال الدالة د حيث د(س) = لو س هو ع<sup>+</sup> ومداها ع
- ٢) منحنى الدالة يمر بالنقط (١، ٠) ، (هـ، ١)
- ٣) هي دالة عكسية للدالة ص = هـ س
- ٤) يستخدم الرمز  $\ln(x)$  لرسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومي للحاسب الآلي.
- ٥) لإيجاد قيمة لو ١٠ مثلاً اضغط على المفاتيح التالية:  
 $\ln \quad 1 \quad 0 \quad =$  → إبدأ  
 نجد أن لو ١٠ = ٢,٣٠٢٥٨٥٠٩٣ ≈ ٢,٣ لأقرب ٩ أرقام عشرية.

### بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي

اللوغاريتم الطبيعي له نفس خواص اللوغاريتمات السابق دراستها. إذا كان  $s \in \mathbb{R}^+$  ،  $v \in \mathbb{R}^+$  ،  $a \in \mathbb{R}^+$  ،  $e \in \mathbb{R}^+$  ، فإن:



$$(١) \text{ الصورة لو } s = v \text{ تكافئ الصورة } s = v$$

$$(٢) \text{ لو } s = v$$

$$(٣) \text{ لو } s = v$$

$$(٥) \text{ لو } s = v$$

$$(٤) \text{ لو } s = v$$

(خاصية تغيير الأساس)

$$\text{لكل } s, v \in \mathbb{R}^+, e \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}$$

$$(٦) \text{ لو } s = v + \text{لو } s$$

$$(٧) \text{ لو } s = \frac{s}{v} \text{ لو } s - \text{لو } s$$

$$(٨) \text{ لو } s^n = n \text{ لو } s$$

$$(٩) \text{ لو } s \times \text{لو } s = 1$$

**لاحظ** يمكن استخدام اللوغاريتمات الطبيعية لإجراء الحسابات العديدة بنفس طريقة استخدام اللوغاريتمات العادية، إلا أن ذلك يتطلب جهداً أكبر بكثير، خاصة أن  $\text{لو } 10 \approx 2.3026$ ، لذلك يفضل استخدامه فيما يتعلق بالنهايات والاشتقاق وحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية للأساس هـ.

### النهايات واللوغاريتم الطبيعي

#### مثال

$$(٣) \text{ أثبت أن } \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1-s}{s} = 1 \text{ حيث } 0 < s$$

الحل

$$(١) \text{ نفرض: } s = 1 - s, \text{ عند } s \rightarrow 0^+ \text{ فإن } s \rightarrow 1$$

$$\text{فيكون } 1 - s = 1 + s$$

$$\therefore \text{لو } 1 - s = \text{لو } (1 + s) \text{ وباستخدام خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$(٢) \therefore \text{لو } 1 - s = \text{لو } (1 + s) \text{ أي أن: } s = \frac{\text{لو } (1 + s)}{\text{لو } 1 - s}$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\frac{\text{لو } 1 - s}{s} = \frac{\text{لو } 1 - s}{\frac{\text{لو } (1 + s)}{\text{لو } 1 - s}} = \frac{\text{لو } 1 - s}{\text{لو } (1 + s)} \times \frac{\text{لو } 1 - s}{\text{لو } 1 - s} = \frac{\text{لو } 1 - s}{\text{لو } (1 + s)}$$

$$\frac{\text{لو } 1 - s}{s} = \frac{\text{لو } 1 - s}{\frac{\text{لو } (1 + s)}{\text{لو } 1 - s}} = \frac{\text{لو } 1 - s}{\text{لو } (1 + s)} = \frac{\text{لو } 1 - s}{\text{لو } (1 + s)}$$

**ملاحظة هامة:** يستخدم المثال السابق كقاعدة في حل المسائل، كما يمكن استخدام النهايات التالية في حل المسائل:

$$(1) \text{ نهايا } \frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{لو } (1+\text{س})}{\text{س}} \quad (2) \text{ نهايا } \frac{\text{لو } (1+\text{س})}{\text{س}} = 1$$

**٦ حاول أن تحل**

**٣** أثبت أن: نهايا  $\frac{\text{لو } (1+\text{ن}) - \text{لو } 1}{\text{ن}}$  = 1

## تمارين ٢ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١** نهايا  $\frac{1}{\text{س}} \left( \frac{1}{\text{س}} + 1 \right)$  يساوي: **أ** ١ **ب** ٢ **ج** هـ **د** هـ<sup>٢</sup>
- ٢** نهايا  $\frac{1}{\text{س}} (1+\text{س})$  يساوي: **أ**  $\frac{1}{3}$  **ب** هـ<sup>٣</sup> **ج** هـ<sup>٤</sup> **د**  $\frac{2}{3}$
- ٣** نهايا  $\frac{1-\text{س}^2}{\text{س}^3}$  يساوي: **أ** ٣ لو ٢ هـ **ب**  $\frac{1}{3}$  لو ٢ هـ **ج**  $\frac{2}{3}$  لو ٢ هـ **د** ٢ لو ٢ هـ
- ٤** نهايا  $\frac{\text{لو } \text{س}}{1-\text{س}}$  يساوي: **أ** صفر **ب** ١ **ج** هـ **د** هـ<sup>-١</sup>

أوجد:

- ٥** نهايا  $\frac{1}{\text{س}} \left( \frac{1}{\text{س}} + 1 \right)$  **٦** نهايا  $\frac{1}{\text{س}} \left( \frac{1}{1+\text{س}} + 1 \right)$  **٧** نهايا  $\frac{1}{\text{م}} \left( \frac{1}{\text{م}} + 1 \right)$
- ٨** نهايا  $\frac{\text{س} + 7}{\text{س} + 3}$  **٩** نهايا  $\frac{\text{لو } (1+\text{س}^2)}{\text{س}}$  **١٠** نهايا  $\frac{\text{لو } (1+\text{س}^2)}{\text{س}}$

أوجد النهايات الآتية:

- ١١** نهايا  $\frac{1}{\text{س}} \left( \frac{4}{\text{س}} + 1 \right)$  **١٢** نهايا  $\frac{1-\text{س}^-}{\text{س}}$  **١٣** نهايا  $\frac{1-\text{س}^2}{\text{س}}$
- ١٤** نهايا  $\frac{1}{\text{س}} (1+3\text{ظا}^2 \text{س})$  **١٥** نهايا  $\frac{1-\text{س}^2}{1+\text{س}^2}$  **١٦** نهايا  $\frac{\text{لو } (1+\text{س}^3)}{\text{س}^2}$

### سوف تتعلم

- مشتقات الدوال الأسية.
- مشتقات الدوال اللوغاريتمية.
- التفاضل اللوغاريتمي.
- المشتقات العليا للدوال الأسية واللوغاريتمية.
- نمذجة المشكلات.

### المصطلحات الأساسية

- Derivative مشتقة
- Chain Rule قاعدة السلسلة
- First Derivative المشتقة الأولى
- الاشتقاق اللوغاريتمي
- Logarithmic Differentiation

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

### استكشف

باستخدام الآلة الحاسبة أكمل الجدول التالي واستكشف **نہا**  $\frac{1-s}{s}$

س	٠,٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠١
$\frac{1-s}{s}$							
س	٠,٩٩٩٥٠٠						

راجع مثال (٤) في الدرس السابق وتحقق من صحة اكتشافك.

### تعلم

### مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي

#### Derivative of Natural Exponential Function

**إذا كانت**  $d(s) = e^s$  **فإن**  $d'(s) = e^s$

من تعريف المشتقة

$$d'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(s+h) - d(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{s+h} - e^s}{h}$$

$$\therefore d'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^s(e^h - 1)}{h} = e^s \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e^s \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^s \times 1 = e^s$$

**أي أن**  $\frac{d}{ds} e^s = e^s$

### مثال

#### مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي

١ أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ)  $y = e^{2+3x}$  ب)  $y = e^{3x}$  ج)  $y = \frac{e^2}{1+x}$

الحل

أ)  $y = e^{2+3x}$   $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{2+3x} \times 3 = 3e^{2+3x}$

ب)  $y = e^{3x}$   $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{3x} \times 3 = 3e^{3x}$

$y = \frac{e^2}{1+x}$   $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{0 \times e^2 - e^2 \times 1}{(1+x)^2} = -\frac{e^2}{(1+x)^2}$



$$\frac{2\text{هـ}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\text{س}}} = \frac{(1+\text{س}) \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\text{س}}} - (2\text{هـ}^{\frac{1}{2}}) \frac{1}{\sqrt{1+\text{س}}}}{(1+\text{س})^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{س}}}{(1+\text{س})^2} \therefore \frac{2\text{هـ}^{\frac{1}{2}}}{1+\text{س}} = \text{ص} \quad \text{ج}$$

## ٩ حاول أن تحل

١ أوجد  $\frac{\text{ك}}{\text{س}}$  لكل مما يأتي:

أ  $\text{ص} = 2\text{هـ}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}^{\frac{1}{2}}$       ب  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{1}{2}} \text{ج}^{\frac{1}{2}}$       ج  $\frac{\text{هـ}^{\frac{1}{2}}}{\text{طاس}} = \text{ص}$

**تفكير ناقد:** ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{1}{2}}$  عند أي نقطة عليه والإحداثي الصادي لهذه النقطة؟  
فسر إجابتك

## قاعدة السلسلة

إذا كانت  $\text{ع}$  دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $\text{س}$ ،  $\text{د}(\text{ع}) = \text{هـ}^{\frac{1}{2}}$  فإن:  $\frac{\text{ك}}{\text{س}} = \text{هـ}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\text{ع}}{\text{س}}$

## مثال

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{1}{2}} + \text{هـ}^{\frac{1}{3}}$       ب  $\text{ص} = 3\text{هـ}^{\frac{1}{2}} \text{قاس}$       ج  $\text{ص} = (\text{هـ}^{\frac{1}{2}} - \text{هـ}^{\frac{1}{3}})^2$

## الحل

أ  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{1}{2}} + \text{هـ}^{\frac{1}{3}} \therefore \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} \times \text{هـ}^{\frac{1}{2}} + \frac{\text{ك}}{\text{س}} \times \text{هـ}^{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{2}\text{هـ}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\text{هـ}^{-\frac{2}{3}}) \text{هـ}^{\frac{1}{2}} + \text{هـ}^{\frac{1}{3}}$   
ب  $\text{ص} = 3\text{هـ}^{\frac{1}{2}} \text{قاس} \therefore \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} \times 3\text{هـ}^{\frac{1}{2}} \text{قاس} = 3\text{هـ}^{\frac{1}{2}} \text{قاس} \times \frac{\text{ك}}{\text{س}} = 3\text{هـ}^{\frac{1}{2}} \text{قاس} \times \frac{\text{قاس}}{\text{س}} = 3\text{هـ}^{\frac{1}{2}} \text{قاس}^2$   
ج  $\text{ص} = (\text{هـ}^{\frac{1}{2}} - \text{هـ}^{\frac{1}{3}})^2 \therefore \frac{\text{ك}}{\text{س}} = 2(\text{هـ}^{\frac{1}{2}} - \text{هـ}^{\frac{1}{3}}) \times (\frac{1}{2}\text{هـ}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\text{هـ}^{-\frac{2}{3}}) = (\text{هـ}^{\frac{1}{2}} - \text{هـ}^{\frac{1}{3}}) \times (\text{هـ}^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\text{هـ}^{-\frac{2}{3}})$

## ٩ حاول أن تحل

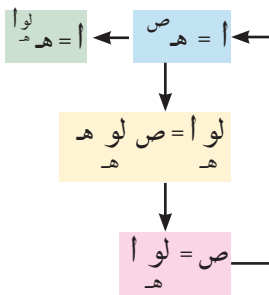
٢ أوجد  $\frac{\text{ك}}{\text{س}}$  لكل مما يأتي:

أ  $\text{ص} = 2\text{س} + \text{هـ}^{\frac{1}{2}}$       ب  $\text{ص} = \frac{1}{\text{هـ}^{\frac{1}{2}}} - \text{هـ}^{\frac{1}{3}}$       ج  $\text{ص} = (\text{هـ}^{\frac{1}{2}} + \text{هـ}^{\frac{1}{3}})^2$

## تعلم

Derivative of Exponential Function to the Base a

مشتقة الدالة الأسية للأساس أ



إذا كانت  $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}$  فإن  $\text{د}(\text{س}) = \text{أ} \text{لو هـ}$

لاحظ أن  $\text{أ} = \text{هـ}^{\text{لو أ}}$  (من خواص اللوغاريتمات)  $\therefore \text{أ} = \text{هـ}^{\text{لو أ}} \therefore \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لو أ}} \times \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لو أ}} \times \frac{\text{لو أ}}{\text{س}}$

ويكون  $\frac{\text{ك}}{\text{س}} = \text{أ} \times \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لو أ}} \times \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لو أ}} \times \frac{\text{لو أ}}{\text{س}}$

وبوجه عام فإن:  $\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a$

مثال

مشتقة الدالة الأسية

٣ أوجد  $\frac{d}{dx} \frac{v}{s}$  لكل مما يأتي:

أ)  $v = 5 \times 6^s$       ب)  $v = 3(2s^3 - 5s + 2)$       ج)  $v = 2 \times 5^{s-2}$

الحل

أ)  $\therefore v = 5 \times 6^s$        $\therefore \frac{d}{ds} 5 \times 6^s = 5(6^s) \ln 6$   
 ب)  $\therefore v = 3(2s^3 - 5s + 2)$        $\therefore \frac{d}{ds} 3(2s^3 - 5s + 2) = 3(6s^2 - 5)$   
 ج)  $\therefore v = 2 \times 5^{s-2}$        $\therefore \frac{d}{ds} 2 \times 5^{s-2} = 2 \times 5^{s-2} \ln 5$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد  $\frac{d}{ds} \frac{v}{s}$  لكل مما يأتي:

أ)  $v = 5s^2 + 2s$       ب)  $v = 2 \ln s$       ج)  $v = 2s^2 - 5s$

تعلم

Derivative of Natural Logarithm Function

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

إذا كانت  $d(s) = \ln s$  ،  $s > 0$  فإن  $d'(s) = \frac{1}{s}$

لاحظ أن الدالة اللوغاريتمية هي دالة عكسية للدالة الأسية

إذا كان  $v = \ln s$  فإن  $s = e^v$

بتفاضل طرفي العلاقة (١) بالنسبة إلى  $s$  :  $\therefore \frac{d}{ds} \ln s = \frac{1}{s}$

من (١) ، (٢) ينتج أن:  $\frac{d}{ds} \ln s = \frac{1}{s}$  أي أن:  $\frac{d}{ds} \ln s = \frac{1}{s}$

مثال

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ)  $v = 3s + \ln s$       ب)  $v = (2s^3 - 5s + 2) \ln s$       ج)  $v = \frac{\ln s - 1}{1 + \ln s}$

## الحل

أ)  $\therefore \text{ص} = 3\text{س} + \text{لو س}$   $\therefore \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = 3 + \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} (\text{لو س})$   $\therefore \frac{1}{\text{س}} + 3 = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} (\text{لو س})$

ب)  $\therefore \text{ص} = (3 - 2^\circ \text{س}) \text{لو س}$   $\therefore \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = (3 - 2^\circ \text{س}) \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} (\text{لو س}) + \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} (\text{لو س})$   $\therefore \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = (3 - 2^\circ \text{س}) \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} (\text{لو س}) + \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} (\text{لو س})$

ج)  $\therefore \text{ص} = \frac{\text{لو س} - 1}{\text{لو س} + 1}$   $\therefore \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \times \frac{\text{لو س} - 1}{\text{لو س} + 1}$

## ٤ حاول أن تحل

٤ أوجد  $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$  لكل مما يأتي:

أ)  $\text{ص} = 5 - 3\text{لو س}$  ب)  $\text{ص} = 2\text{س} = \text{لو س}$  ج)  $\text{ص} = \frac{2 - 1}{\text{لو س}}$

**تفكير ناقد:** ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى  $\text{ص} = \text{لو س}$  عند أي نقطة عليه والإحداثي السيني لنقطة المماس؟ فسر إجابتك.

## قاعدة السلسلة

**فإن:**  $\frac{\text{ك}}{\text{ك س}} [\text{لو ع}] = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \cdot \frac{1}{\text{ع}}$

ع إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، (د ع) = لو ع

ع إذا كانت  $\text{س} > 0$  فإن:  $\frac{\text{ك}}{\text{ك س}} [\text{لو}(-\text{س})] = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \times (-1) = -\frac{\text{ك}}{\text{ك س}}$

ع وبوجه عام  $\frac{\text{ك}}{\text{ك س}} [\text{لو}|\text{س}|] = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}}$  لكل  $\text{س} \neq 0$

،  $\frac{\text{ك}}{\text{ك س}} [\text{لو}|\text{ع}|] = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \cdot \frac{1}{\text{ع}}$  حيث ع دالة قابلة للاشتقاق في س.

## مثال

٥ أوجد  $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$  لكل مما يأتي:

أ)  $\text{ص} = \text{لو} (9 + 3^\circ \text{س})$  ب)  $\text{ص} = \text{س}^\circ = \text{لو س}^\circ$  ج)  $\text{لو} \frac{2}{7 + \text{س}}$

## الحل

أ)  $\therefore \text{ص} = \text{لو} (9 + 3^\circ \text{س})$   $\therefore \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \times \frac{1}{9 + 3^\circ \text{س}} = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \times \frac{1}{9 + 3^\circ \text{س}}$

ب)  $\therefore \text{ص} = \text{س}^\circ = \text{لو س}^\circ$   $\therefore \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \times \frac{1}{\text{س}^\circ} = \frac{\text{ك}}{\text{ك س}} \times \frac{1}{\text{س}^\circ}$

$$\begin{aligned}
 &= \text{س}^4 \times \frac{1}{\text{س}^3} \times \text{س}^3 + \text{س}^3 \times \text{لو}^3 \text{س}^4 \times \text{س}^3 \\
 &= \text{س}^3 \times \text{س}^4 + \text{س}^3 \times \text{لو}^3 \text{س}^3 = [\text{س}^4 + \text{لو}^3 \text{س}^3] \text{س}^3 \\
 &\text{ج} \quad \frac{\text{س}^4 + \text{س}}{\text{س}(\text{س} + 7)} = \frac{1 \times \text{س}^2 - (\text{س}^2)(7 + \text{س})}{\text{س}^2(\text{س} + 7)} \times \frac{\text{س} + 7}{\text{س}} = \left( \frac{\text{س}^2}{\text{س} + 7} \right) \frac{\text{س}}{\text{س}}
 \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

٥ أوجد  $\frac{\text{س}}{\text{س}}$  لكل مما يأتي:

أ ص =  $\text{لو}^2(\text{س} - 3)$       ب ص =  $\text{س}^2 \text{لو}^2 \text{س}$       ج ص =  $\frac{\text{س}}{\text{لو}^3 \text{س}}$

تعلم



Derivative of Logarithmic Function to the Base a

مشتقة الدالة اللوغارتمية للأساس a

إذا كانت د(س) =  $\text{لو}^a \text{س}$  فإن د'(س) =  $\frac{1}{\text{س} \text{لو}^a \text{س}}$

تذكر أن



من خواص اللوغارتميات

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{لو}^a \text{س}}{\text{لو}^a \text{س}} &= \text{لو}^a \text{س} \\
 \text{لو}^a \text{س} \times \text{لو}^{-a} \text{س} &= 1
 \end{aligned}$$

لاحظ  $\frac{\text{س}}{\text{س}} (\text{لو}^a \text{س}) = \left[ \frac{\text{لو}^a \text{س}}{\text{لو}^a \text{س}} \right] \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} (\text{لو}^a \text{س}) = \frac{1}{\text{س}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$

ويكون  $\frac{\text{س}}{\text{س}} (\text{لو}^a \text{س}) = \frac{1}{\text{س}} \text{لو}^a \text{س}$

وبوجه عام  $\frac{\text{س}}{\text{س}} (\text{لو}^a \text{س}) = \frac{1}{\text{س}} \text{لو}^a \text{س}$

مشتقة الدالة اللوغارتمية

مثال

٦ أوجد  $\frac{\text{س}}{\text{س}}$  لكل مما يأتي:

أ ص =  $\text{لو}^3 \text{س}$       ب ص =  $\text{لو}^2(\text{س} - 2)$       ج ص =  $\text{لو}^2(\text{س} - 3)$

الحل

أ  $\therefore \text{ص} = \text{لو}^3 \text{س}$   $\therefore \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$

ب  $\therefore \text{ص} = \text{لو}^2(\text{س} - 2)$   $\therefore \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{2}{\text{س}^2} = \frac{2}{\text{س}}$

$$\frac{4}{\frac{2 \times 2}{(3-2)^2}} = \frac{2 \times 2}{(3-2)^2} = \frac{4}{1} = 4 \quad \therefore \text{ج} \quad 2 \text{ لو } 2 \text{ س} - 3 = 4$$

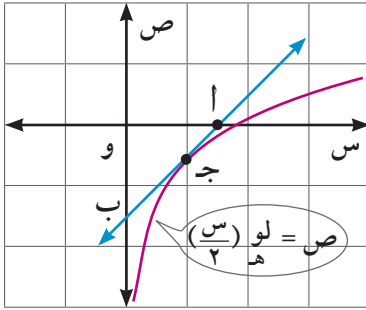
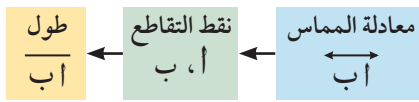
## ٤ حاول أن تحل

٦ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند قيم س المعطاة:

- أ ص = لو ٥ س ، س = ٢ ، ب ص = ٤ لو (٣ س + ١) ، س = ١ ، ج ص = لو (٣ س - ٢) ، س = ١ ، د ص = ٣ (لو س) ، س = ٣

٧ تطبيقات هندسية: إذا كان  $\vec{AB}$  مماس للمنحنى ص = لو  $\frac{س}{٢}$  في النقطة ج (١ ، ص) ويقطع محور السينات في النقطة أ، ومحور الصادات في النقطة ب أوجد طول  $\vec{AB}$

## الحل

لإيجاد طول  $\vec{AB}$  نتبع المخطط المقابل

$$\text{ميل المماس عند أى نقطة: } \frac{ص}{س} = \frac{1}{س} \times \frac{2 \times 1}{2} = \frac{1}{س}$$

 $\therefore \vec{AB}$  يمس المنحنى في النقطة ج (١ ، ص)

$$\text{فإن ص} = \text{لو} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{أى أن ج (١ ، -١/٢) ، وعندها}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{1}{س} = 1 \quad \text{وتكون معادلة المماس } \vec{AB} \text{ عند ج هي:}$$

$$\text{ص} + \text{لو} ٢ = ١ - ١$$

$$\therefore \vec{AB} \text{ يقطع محور السينات في النقطة أ}$$

ويقطع محور الصادات في النقطة ب

$$\text{ويكون (أب)} = \sqrt{(١ + ١)^2 + (١ + ١)^2} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$$

## ٤ حاول أن تحل

٧ إذا كان العمودي للمنحنى ص = لو ٢ س عند النقطة أ (١ ، ٢) يقطع محور السينات في النقطة ب أوجد طول  $\vec{AB}$  لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

## تطبيقات رياضية

## Logarithmic Differentiation

## الاشتقاق اللوغاريتمية

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفيها واستخدام خواص اللوغاريتمات في تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق.

## مثال

٨ أوجد  $\frac{ص}{س}$  لكل مما يأتي:

- أ ص = (٥ + ٣) س ، ب ص = [جاس] ظاس

**الحل**

أ)  $\therefore \text{ص} = (\text{س}^3 + 5)^{\text{س}}$   
 باأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة  
 باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى س  

$$\frac{1}{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د}(\text{س}^3 + 5)}{\text{د س}} = \frac{\text{س}^3}{\text{س}^3 + 5} + (\text{س}^3 + 5) \frac{\text{د س}}{\text{د س}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = (\text{س}^3 + 5)^{\text{س}} \left[ \frac{\text{س}^3}{\text{س}^3 + 5} + 1 \right]$$

ب)  $\therefore \text{ص} = [\text{جاس}]^{\text{طاس}}$   
 باأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة  
 باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س  

$$\frac{1}{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د}[\text{جاس}]}{\text{د س}} = \frac{\text{طاس}}{\text{جاس}} \times \frac{\text{د جاس}}{\text{د س}} + [\text{جاس}] \frac{\text{د طاس}}{\text{د س}}$$

$$= \frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} \times \frac{1}{\text{جاس}} + \text{جاس} \times \frac{\text{د طاس}}{\text{د س}} = 1 + \text{قاس} \times \frac{\text{د جاس}}{\text{د س}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = [\text{جاس}]^{\text{طاس}} (1 + \text{قاس} \times \frac{\text{د جاس}}{\text{د س}})$$

**٩ حاول أن تحل**

أوجد  $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$  لكل مما يأتي

أ)  $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}^2}$       ب)  $\text{ص} = (\text{جاس})^{\text{س}}$       ج)  $\text{ص}^3 = \text{س}^3 \times \text{ص}^2$

٩ **تحقيق علاقة:** إذا كانت  $\text{ص} = \sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}$  حيث  $1 < \text{س} > 1$  أثبت أن:  $(\text{س}-1)^2 \text{ص}^2 = \text{س}^2$

**الحل**

$\therefore \text{ص} = \sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}$  باأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د}(\sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}})}{\text{د س}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right)$$

$$\frac{1}{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{د}(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1})}{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} \right)$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}^2}{(\text{س}-1)^2}$$



## ٩ حاول أن تحل

٩ إذا كانت  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{1}{3}}$  أثبت أن:  $\text{س} \text{ ص} // + 2 \text{ ص} \text{ ص} - \text{س} \text{ ص}^{\frac{1}{2}} = 0$

## تمارين ٢ - ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ إذا كانت  $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  فإن  $\text{د}(\text{س})$  تساوي:

- أ  $\text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  ب  $\text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  ج  $\text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  د  $\text{هـ}^{\frac{3}{2}}$

٢ إذا كان  $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  فإن  $\text{د}(\text{س})$  تساوي:

- أ  $\text{د}(\text{س})$  ب  $\text{د}(\text{س})$  ج  $\text{د}(\text{س})$  د  $\text{د}(\text{س})$

٣ منحنى الدالة  $\text{د}(\text{س}) = 1 + \text{لو}(\text{س} - 2)$  هو نفس منحنى الدالة  $\text{ر}(\text{س}) = \text{لو}(\text{س})$  بالانتقال:

- أ  $(1, 2)$  ب  $(2, 1)$  ج  $(1, 2)$  د  $(2, 1)$

٤ النسبة بين ميل مماس المنحنى  $\text{ص} = \text{لو}^{\frac{3}{2}} + 1$  وميل مماس المنحنى  $\text{ص} = \text{لو}^{\frac{5}{2}} + 1$  عند  $\text{س} = 1$  كنسبة

- أ  $3:5$  ب  $5:3$  ج  $1:1$  د  $3:5$

أوجد المشتقة الأولى لكل من:

- ٥  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  ٦  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  ٧  $\text{ص} = (\text{س} - 1)^{-2}$
- ٨  $\text{ص}^2 = \text{هـ}^{\frac{3}{2}}$  ٩  $\text{ص} = \text{لو}(\text{س} - 7)$  ١٠  $\text{ص} = \text{لو}(\frac{1}{\text{س}} + \text{س}^2)$
- ١١  $\text{ص} = \text{لو} \frac{\text{س}^2}{7 + \text{س}}$  ١٢  $\text{ص} = \text{س}^2 \text{ لو} \text{س}$  ١٣  $\text{ص} = \text{لو}^2(9 + \text{س}^4)$
- ١٤  $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\frac{3}{2}}}{\text{لو} \text{س}}$  ١٥  $\text{ص} = \text{قاه} \text{س}$  ١٦  $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{3}{2}} - 5 \text{ لو} \frac{\text{س}}{5}$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

- ١٧  $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} - 2 \text{ هـ}^{\frac{3}{2}}$  ،  $\text{س} = \frac{1}{4}$
- ١٨  $\text{ص} = \text{س}^2 - 3 \text{ لو} \text{س}$  ،  $\text{س} = 2$
- ١٩  $\text{ص} = \frac{1}{4} \text{ هـ}^{\frac{3}{2}} - 2 \text{ لو} \text{س}$  ،  $\text{س} = \frac{1}{4}$

أوجد  $\frac{ص}{س}$  لكل مما يأتي:

٢٢)  $ص = س جاس$

٢١)  $س لو ص = ٥٨$

٢٠)  $ص هـ س = ٣$

٢٥)  $ص = س \frac{١}{س}$

٢٤)  $ص هـ س = هـ س$

٢٣)  $ص هـ س = هـ س$

أوجد  $\frac{ص}{س}$  ،  $\frac{ص^٢}{س}$  لكل مما يأتي:

٢٦)  $س هـ ن = ٣$  ،  $ص ن = ٣$

٢٧)  $س = ٦ لون$  ،  $ص ن = ٢$

أجب عن كل ما يأتي:

٢٨) إذا كانت  $ص = س^٢ لو$  فأوجد  $\frac{ص^٣}{س}$  عند  $س = ٤$

٢٩) إذا كانت  $هـ س = \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{س ن}{ن}$  أثبت أن:  $\frac{س}{س} (هـ س) = هـ س$

٣٠) إذا كانت  $ص = \sqrt{\frac{١+س^٢}{١-س^٢}}$  أثبت أن  $(س - ١) ص + ٢ س ص = ٠$

٣١) أوجد قيم  $س$  التي يكون عندها مماس المنحنى  $ص = ٩ س^٣ - ٨ لو$  موازياً لمحور السينات.

٣٢) أوجد معادلة العمودى للمنحنى  $ص = ٣ هـ س$  عند نقطة واقعه عليه وإحداثياتها السينية يساوى ١-

٣٣) **الربط بالصناعة:** إذا كان الإنتاج اليومي لأحد المصانع خلال فترة زمنية  $ن$  (يوماً) يتعين بالعلاقة  $ص = ٤٠٠ (١ - هـ^٣٠٠ ن)$  وحدة أوجد معدل التغير في عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن في اليوم العاشر.



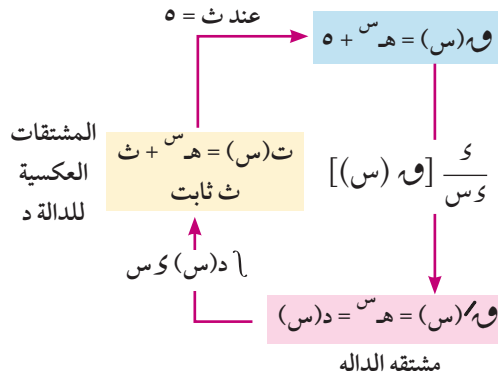
٣٤) **تطبيقات حياتية:** إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطى

بالعلاقة:  $ص = (ن + ١٠٠) لو (ن + ٥)$  جرام بدلالة عدد الأيام  $ن$ . أوجد معدل تغير إنتاج الخلية عند  $ن = ٥$  ،  $ن = ١٥$  ،  $ن = ٢٠$ . هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص؟

# تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

٢ - ٣

## Integrals of Exponential and Logarithmic Function



### استكشف

من دراستك السابقة في التفاضل تعلم أن مشتقة الدالة  $e^s$  بالنسبة إلى  $s$  حيث  $\ln(s) = e^s$  هي  $\ln(s) = e^s$  إذا رمزنا للدالة  $\ln(s)$  بالرمز  $D(s)$  فإننا نستطيع بعملية عكسية (التكامل غير المحدد) إيجاد عدد غير محدد من الدوال الأخرى  $(\ln(s) + \theta)$  مشتقة كل منها يساوي  $D(s)$  تسمى بمجموعة المشتقات العكسية للدالة  $D$  إحداها يساوي  $\ln(s)$  حيث:

$D(s) = \ln(s) + \theta$  حيث  $\theta$  ثابت اختياري

استكشف مجموعة المشتقات العكسية لكل من:

$$D(s) = e^s, \quad s \ln(s) = e^s, \quad \ln(s) = \frac{1}{s}$$

### تعلم

### التكامل غير المحدد للدالة الأسية

#### Indefinite Integrals of Exponential Function

إذا كان  $k$  عددًا حقيقيًا حيث  $k \neq 0$

فإن:  $\ln(s) = e^s = \ln(s) + \theta$

حيث  $\theta$  ثابت اختياري

$\ln(s) = e^s = \ln(s) + \theta$

### مثال

١ أوجد:

أ  $\ln(s) = e^s$  ب  $\ln(s) = e^s$  ج  $\ln(s) = e^s$

الحل

أ  $\ln(s) = e^s = \ln(s) + \theta$

### سوف تتعلم

- تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تطبيقات هندسية.
- تطبيقات فيزيائية.

### المصطلحات الأساسية

- Antiderivative مشتقة عكسية
- Integration تكامل
- Indefinite integral تكامل غير محدد
- Arbitrary constant ثابت اختياري

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلي.



$$\lambda \text{ ا د (س) } \gamma \text{ س} = \lambda \text{ ا د (س) } \gamma \text{ س}$$

 حاول أن تحل

١ أوجد

نہ

ج ۱-۶ هـ ۲، ص ۵۰

ب. ۱-ھ-۴۰۰۰

ا)  $\pi$  هس و س

مثال 

٢ أوجد كل من التكاملات التالية:

١)  $\frac{5س + 3ه - 2س}{2}$

**الحل** 

$$= \frac{1}{2} [\lambda (\psi^\dagger \psi + \psi \psi^\dagger) - \psi^\dagger \psi]$$

$$= \frac{1}{2} (\text{هس} - \text{ه-س}) + \text{ث}$$

ب)  $1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2} \text{س} - \text{هس} + \text{ث}$$

**حاول أن تحل**

٢ أوجد:

ا)  $\frac{h_s + h_{-s}}{h_s} \approx 1$

ب)  $2s^2 + 2s^2$  (س + ۲س)

ج ۱ (س ۲ + ه ۳) یس

**لاحظ أن:** إذا كانت د(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن:

$$\text{ل هـ}^{(س)} \cdot \text{د}^{(س)} \text{س} = \text{هـ}^{(س)} + \text{ث}$$

مثال 

۳ ۱ جاس ہ جتاس و س

ب) ۱۴ س ۲+۱ س

الحل 

۱) بوضع د (س) = جتا س  $\therefore$  د (س) = - جاس

لا جاس هـ جتاس وس = لا هـ جتاس (- جاس) وس = هـ جتاس + ث

ب) بوضع د(س) =  $s^2 + 1$   $\therefore$  د(س) =  $s^2$

۱.  $s^2 + 1 = s^2$   $\Rightarrow$   $s^2 = s^2 + 1$   $\Rightarrow$   $0 = 1$   $\Rightarrow$   $s^2 = 0$   $\Rightarrow$   $s = 0$

 حاول أن تحل

٣ أوجد التكاملات التالية:

۱) (جتاس ھ جاس + ۳س ۲) ۵س

ب)  $l$  (س - ۳) ھـ س<sup>۲-۶</sup> س<sup>۰</sup> ی س

## التكامل غير المحدد للدوال اللوغاريتمية

## Indefinite Integral of Logarithmic Functions

**تعلیم اُن**  $\frac{s}{s} = (\text{لو س}) = \frac{1}{s}$  ،  $s < 0$  ،  $\frac{s}{s} = (\text{لو س}) = -\frac{1}{s}$  ،  $s > 0$  ،

و بوجہ عام  $\frac{s}{s}$  لو  $|s| = \frac{1}{s}$  جیٹ  $s \neq 0$ .

أى إن الدالة لو  $|s|$  حيث  $s \neq 0$  إحدى المشتقات العكسية للدالة  $\frac{1}{s}$

وعلیٰ ذلک فإن:

$$\frac{1}{s} \text{ و } s = |s| + \theta \quad \text{حيث } s \neq 0.$$

## مضاعفات الدالة

مثال 

٤) أوجد كلاً من التكاملات التالية:

ا.  $\frac{2}{3}$  ل. دس  
ب.  $\frac{7}{3}$  ل. دس

**الحل** 

(۱)  $\frac{2}{س} \cdot \frac{1}{س} = \frac{2}{س} \cdot \frac{1}{س} = \frac{2}{س}$

(ب)  $\frac{٧}{س\ لو٣} \searrow \frac{١}{س} = \frac{٧}{لو٣} \searrow |س| + ث$

**حاول أن تحل**

٤ أوجد:

أ ١  $\frac{3}{5}$  ٢

ب)  $3\frac{4}{5}$  س لو ۵

ج ۲ لو س ۳ س لو س ۳ س



## مثال

٥ أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ  $\int \ln(3x^2 + \frac{5}{x}) dx$     ب  $\int \ln(\frac{x^2}{x} + \frac{2}{x}) dx$     ج  $\int \ln(\frac{(1-x^3)^2}{x^3}) dx$

الحل

أ  $\int \ln(3x^2 + \frac{5}{x}) dx = \int \ln(\frac{3x^3 + 5}{x}) dx = \int \ln(3x^3 + 5) dx - \int \ln x dx$   
 ب  $\int \ln(\frac{x^2}{x} + \frac{2}{x}) dx = \int \ln(x + \frac{2}{x}) dx = \int \ln(x + \frac{2}{x}) dx - \int \ln x dx$   
 ج  $\int \ln(\frac{(1-x^3)^2}{x^3}) dx = \int \ln(1-x^3)^2 dx - \int \ln x^3 dx = 2 \int \ln(1-x^3) dx - 3 \int \ln x dx$   
 حيث  $s \neq 0$

## ٦ حاول أن تحل

٥ أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ  $\int \ln(\frac{6x^5 - 5}{x^3}) dx$     ب  $\int \ln(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2}) dx$     ج  $\int \ln(\frac{3}{x} - \sqrt{x}) dx$

لاحظ أن: إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق،  $(f(x))' \neq 0$  فإن  $\int \ln(f(x)) dx = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) + \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

## مثال

٦ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

أ  $\int \ln(\frac{4}{x^2 + 1}) dx$     ب  $\int \ln(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}) dx$     ج  $\int \ln(x) dx$

الحل

أ  $\int \ln(\frac{4}{x^2 + 1}) dx = \int \ln 4 dx - \int \ln(x^2 + 1) dx = 4x - \int \ln(x^2 + 1) dx$   
 ب  $\int \ln(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}) dx = \int \ln(x^2 + 3) dx - \int \ln(x^2 - 3) dx$   
 ج  $\int \ln(x) dx = \frac{1}{x} \cdot 1 + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$

## ٦ حاول أن تحل

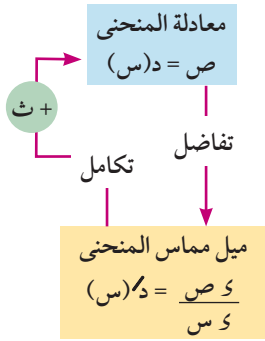
٦ أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ  $\int \ln(x) dx$     ب  $\int \ln(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}) dx$     ج  $\int \ln(\frac{(2+x)^2}{1+x^3}) dx$

## مثال

- ٧ تطبيقات هندسية: منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى  $\frac{3س+2}{س}$  أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥)

## الحل



بفرض معادلة المنحنى ص = د(س)

$$\therefore \text{ميل المماس عند أى نقطة} = \frac{ص}{س} = \frac{3س+2}{س}$$

$$\therefore ص = \frac{ص}{س} \cdot س = (3 + \frac{2}{س}) \cdot س$$

$$\therefore ص = 3س + 2 \quad \text{لو س + ث حيث ث ثابت إختياري}$$

∴ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥) فهي تحقق معادلته أى إن:

$$3هـ + ٥ = 3(٣هـ + ٥) + 2 \quad \therefore ٣ = ث$$

و تكون معادلة المنحنى هي: ص = 3س + 2 لو س + ٣

## ٩ حاول أن تحل

- ٧ ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى  $\frac{1}{س-٢}$  وكان د(هـ) =  $\frac{1}{٢}$  أوجد د(٢هـ)

## مثال

- ٨ تطبيقات فيزيائية: إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة  $\frac{كم}{ن} = ١٠ - ٠.٠١ن$  وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٨٠ سم<sup>٢</sup>، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ.

## الحل

$$\text{مساحة سطح الصفيحة م} = \frac{كم}{ن} \cdot ن = ١٠ن - ٠.٠١ن^2$$

$$\therefore م = ١٠ن - ٠.٠١ن^2 \quad \text{عند بداية التغير ن = ٠ ، م = ٨٠} \quad \therefore ٩٠ = ث$$

ويكون مساحة سطح الصفيحة فى أى لحظة م = ٩٠ - ١٠ - ٠.٠١ن<sup>٢</sup>

بعد ١٠ ثوانٍ ∴ مساحة سطح الصفيحة = ٩٠ - ١٠ - ٠.٠١سم<sup>٢</sup>

## ٩ حاول أن تحل

- ٨ إذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسياً مع الزمن بالأسابيع، وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠، ٣٠٠ وحدة. أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع.



## تمارين ٢ - ٣



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا كان  $\frac{1}{p} = (س)$  ،  $\frac{1}{p} [س^-ه + س^-ه]$  ،  $د = (٠) = ١$  ، فإن  $د(س)$  تساوي:
- أ  $د - (س)$     ب  $د(س)$     ج  $-د(س)$     د  $د(س)$
- ٢ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه  $(س، ص)$  يساوى  $٢ه$  ،  $د = (٠) = ٢$  فإن  $د(٢)$  تساوي:
- أ  $٤$     ب  $٤ه$     ج  $٢ه$     د  $٢ه$

- ٣  $\theta$  و  $\theta$  تساوى
- أ  $- لو |جتا \theta| + ث$     ب  $- لو جتا \theta + ث$     ج  $لو جتا \theta + ث$     د  $|لو جتا \theta| + ث$
- ٤  $٢س$  و  $٢س$  تساوى
- أ  $\frac{1}{p} هس + ث$     ب  $هس + ث$     ج  $٢هس + ث$     د  $٤هس + ث$

أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

- ٥  $ل هس$     ٦  $ل (٣س + ٢هس) و س$     ٧  $ل (\frac{٤}{س} - هس) و س$
- ٨  $ل ه٣ - ١ و س$     ٩  $ل \frac{٧}{٣} ه٣ - ٤ و س$     ١٠  $ل ٢هس (١ + هس) و س$
- ١١  $ل \frac{ه٣ + ٢ه٢ + ٤}{هس} و س$     ١٢  $ل ٢هس + ٣س و س$     ١٣  $ل \frac{٢هس}{١ + هس} و س$
- ١٤  $ل \frac{س}{١ - ٤س} و س$     ١٥  $ل \frac{س}{١ + ٢س} و س$     ١٦  $ل \frac{قاس}{ظاس} و س$
- ١٧  $ل \frac{جاس + جتاس}{جاس - جتاس} و س$     ١٨  $ل \frac{جتاس}{١ + جاس} و س$     ١٩  $ل \frac{قاس ظاس}{١ - قاس} و س$
- ٢٠  $ل \frac{١}{(س لو س) ه} و س$     ٢١  $ل \frac{س٢}{٢(١ + س)} و س$     ٢٢  $ل \frac{(لوس)٢}{س} و س$
- ٢٣  $ل \frac{٢س٣}{١ - ٣س} و س$     ٢٤  $ل \frac{٥ - ٢س٣}{١ + ٣س} و س$     ٢٥  $ل \frac{٤هس + س هس}{س هس} و س$
- ٢٦  $ل \frac{٤}{س لو س ه} و س$     ٢٧  $ل \frac{(١ + لو س)٢}{س} و س$

- ٢٨ **تطبيقات هندسية:** إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة  $د$  عند أى نقطة  $(س، ص)$  يساوى  $٢ه - \frac{1}{٣س}$ ،  $د(٠) = ١$  أوجد  $د(٣)$



## ملخص الوحدة

العدد هـ يُعرف العدد هـ من العلاقة

$$\text{هـ} = \text{نـ} \left( 1 + \frac{1}{\text{س}} \right) \quad , \quad \text{هـ} = \text{نـ} \left( 1 + \frac{1}{\text{س}} \right) \quad \text{س} \leftarrow \infty$$

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي دالة أسية أساسها هـ حيث د(س) = هـ<sup>س</sup> ، س ∈ ع

دالة اللوغاريتم الطبيعي دالة لوغاريتمية أساسها هـ حيث د(س) = لو<sub>هـ</sub> س ، س ∈ ع

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

الدالة	مشتقة الدالة	الشرط
هـ <sup>س</sup>	هـ <sup>س</sup>	س ∈ ع
هـ <sup>د(س)</sup>	هـ <sup>د(س)</sup> • د'(س)	د قابلة للاشتقاق
ا <sup>س</sup>	ا <sup>س</sup> لو ا	ا > 0 ، ا ≠ 1
لو ا <sup>س</sup>	$\frac{1}{\text{س}}$	س ≠ 0
لو  د(س)	$\frac{1}{\text{د(س)}}$ • د'(س)	د قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ 0

تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

الدالة	تكامل الدالة	الشرط
هـ <sup>س</sup>	هـ <sup>س</sup> + ث	س ∈ ع
هـ <sup>ك</sup>	$\frac{1}{\text{ك}}$ هـ <sup>ك</sup> + ث	ك ≠ 0
هـ <sup>د(س)</sup> • د'(س)	هـ <sup>د(س)</sup> + ث	د قابلة للاشتقاق
$\frac{1}{\text{س}}$	لو ا <sup>س</sup> + ث	س ≠ 0
$\frac{1}{\text{د(س)}}$ • د'(س)	لو  د(س)  + ث	د قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ 0



# تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) منحني الدالة د حيث د(س) = هـس<sup>-٣</sup> + ٢ هو نفس منحني م(س) = هـس بانتقال:
  - أ) (٢، ٣)      ب) (٢، -٣)      ج) (٣، -٢)      د) (٣، ٢)
- ٢) إذا كان د(س) = س د(س)، د(٣) = ٥- فإن د(٣) تساوي:
  - أ) ٥٠-      ب) ٤٠-      ج) ١٥      د) ٢٧
- ٣) لو س<sup>٢</sup> لو س      و س تساوي:
  - أ) س + ٢      ب) س + ١      ج) ٢س + ث      د) لو س + ث
- ٤) س لو س<sup>٣</sup> و س تساوي:
  - أ) ٣ لو س + ث      ب) ٣ لو س + ث      ج) ١/٣ لو س + ث      د) ١/٣ لو س + ث
- أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:
  - ٥) لو (س - ٣) = ٢      ٦) لو (س + ٧) = ٥      ٧) هـس<sup>٥</sup> + ١ = ٢٠
  - ٨) لو ٤ س<sup>٢</sup> - ١ = لو ٥٠      ٩) لو ٢ هـس = ٣ لو ٢      ١٠) ٢٥ = ٣٧ س
- أوجد كلاً من النهايات التالية:
  - ١١) نها (١ + ٢/ن)<sup>٣</sup>      ١٢) نها (١ - ن/١)<sup>ن</sup>      ١٣) نها (١ - س<sup>٢</sup> / (١ + س<sup>٢</sup>))<sup>س</sup>
- أوجد ص لكل من:
  - ١٤) ص = ٧ هـس - ٣      ١٥) ص = هـس<sup>٣</sup> + ١      ١٦) ص = س<sup>٢</sup> هـس<sup>-٣</sup>
  - ١٧) ص = لو (س<sup>٢</sup> + ٣)      ١٨) ص = س لو س<sup>٢</sup>      ١٩) ص = هـس لو (س<sup>٢</sup> + ١)
  - ٢٠) ص = هـس / (١ + هـس)      ٢١) ص = س<sup>٢</sup> لو هـس      ٢٢) ص = ١ / (س لو هـس)
- أوجد ص<sup>٢</sup> / ص لكل مما يأتي:
  - ٢٣) س = هـس<sup>٢</sup> ، ص = هـس<sup>٣</sup>      ٢٤) س = ن<sup>٣</sup> ، ص = ٤ لو ن
- أوجد ص<sup>٣</sup> / ص لكل مما يأتي:
  - ٢٥) ص = لو س      ٢٦) ص = س<sup>٣</sup> + هـس<sup>٢</sup>      ٢٧) ص = س لو س



٢٨ إذا كان  $h_s = s + v$  أثبت أن:  $(s - 1)v = s^2 - s - h_s$   $s$  ص

٢٩) إذا كانت  $s^2 = \text{أ ب لو س}$  أثبت أن:  $s^2 \text{ص} // \text{س} \text{ص} + \text{س} \text{ص} + \text{س} \text{ص} = \text{ص} \text{ص}$ .

أوجد  $\frac{ds}{dv}$  لكل مما يأتي:

۳۱ (ص = ۳س = ۳ + ۲س)

۳۰ ﴿ص = ص۲ (س + ۱)

۳۳ ص = س ه س

۳۲ ص = (۱ - ۳س) جتاس

أوجد قيم  $s$  التي يكون عندها مماس المنحنى  $y = x^2 + 2x + 3$  موازي محور السينات حيث  $s < 0$ .

٣٥ ص =  $\frac{١}{٢}$  لو س ٢

۳۴) ص = س<sup>۳</sup> لو س<sub>ه</sub>

۳۷)  $\frac{س}{۲} + \frac{س^۲}{۴} - ۳ = ص$

۳۶ ص = س<sup>۳</sup> - ۸۱ لو س<sub>ه</sub>

❸۸ إذا كان س هـ  $\frac{1}{2}$  ص هـ  $\frac{3}{2}$  = ۲ أوجد  $\frac{ص}{س}$  عند س = ۰

أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

۳۹. ل.  $\frac{۹+۶س}{س+۳س}$  ی س

۴۰. ل.  $\frac{\frac{لو س}{س}}{\frac{س لو}{س}}$  ی س

۴۱. ل.  $(\frac{۳}{س} + ۴س - س^۲)$  ی س

(۴۰) لو س  
س لو س

۳۹)  $\frac{9+7 \text{ س}}{2+3 \text{ س}}$  ۵ س

۴۲) ل.  $\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)$  س لو ۳ ی س  
 ۴۳) ل.  $\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)$  س ی س  
 ۴۴) ل.  $\frac{3}{2}$  س ی س

۴۳ ﴿ (س ۳ - ۲/۳ هـ س) ی س

۴۲)  $\left( \frac{3}{s} + s \right) \mathcal{L}^{-1}$  (لو ۳) س

**٤٥) التقاطع مع المحاور:** إذا كان مماس المنحنى  $\mathcal{C}$  =  $\mathcal{H}^s$  عند النقطة  $(2, \mathcal{H}^2)$  يقطع محور السينات في النقطة  $A$ ، ومحور الصادات في النقطة  $B$ ، أوجد طول  $\overline{AB}$

٤٦) **معادلتا المماس والعمودي:** أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى  $V = S^3 - 18S$  لو  $S$  عند نقطة تقع عليه وإحداثيها السيني يساوى ٢.

٤٧) **التناسب العكسي:** إذا كان ميل المماس عند أي نقطة (س ، ص) على منحنى الدالة د يتناسب عكسيًا مع س وكان ميل المماس يساوي ٢ عند س = ٤ ، ص = ٢ أوجد ص بدلالة س.

**٤٨ التوازي:** أوجد قيم  $s$  (الأقرب رقمين عشريين) التي يكون عندها مماس المنحنى  $v = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$  موازيًا لمحور السينات.

# افنتبار تراكمي

اختر الإجابات الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) نها  $\left(\frac{1}{s} + 1\right)^{2s}$  تساوي:  $\infty \leftarrow s$

- أ) ١      ب) هـ      ج) هـ<sup>٢</sup>      د) هـ<sup>-٢</sup>

٢) م = هـ<sup>٧</sup> لو فإن م تساوي:

- أ) ١      ب)  $\frac{1}{هـ}$       ج) هـ      د) ٧

٣) مجموعة حل المعادلة لو<sup>٣</sup> - (س - ٣) + لو<sup>٢</sup> - (س - ٢) = لو<sup>٦</sup> هي:

- أ) {٠، ٥}      ب) {٥}      ج) {٢، ٣}      د)  $\phi$

٤) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> - ٣ لو هـ<sup>٥</sup> فإن د(٢) تساوي:

- أ) ١-      ب) ١      ج)  $\frac{٥}{٢}$       د) ٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

٥) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

- أ) ص = (س<sup>٣</sup> + ١)<sup>٢</sup>      ب) ص = لو<sup>٢</sup> س<sup>٢</sup> - هـ<sup>١</sup> س<sup>١</sup>      ج) ص = لو<sup>٢</sup>  $\left[\frac{هـ}{س}\right]$

٦) إذا كانت ص = هـ<sup>٣</sup> + س<sup>٢</sup> أثبت أن:  $\frac{ص}{س} = ٢ - ٩(ص - س)$

٧) أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

- أ)  $\int \frac{س^٢ + ٣}{س} دس$       ب)  $\int \frac{س}{س^٢ هـ} دس$       ج)  $\int \frac{س^٣}{س^٢ لو س} دس$

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي ٧ - ٢ هـ<sup>٣</sup> وكان د(لو<sup>٢</sup>) = ٣، أوجد د(س).

إذا لم تستطع الإجابة عن أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
أرجع إلى	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣

# الوحدة الثالثة

## سلوك الدالة ورسم المنحنيات

### Behavior of the Function and Curve Sketching

#### مقدمة الوحدة

يمكنك من خلال قراءة الشكل البياني لمنحنى دالة أن تحدد فترات اطراد (تزايد - تناقص - ثبات) كما يمكن معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة والتعرف على بعض خواص الدالة، كما تستطيع باستخدام البرامج الرسومية للحاسب الآلى رسم الدالة ودراسة سلوكها... إلا أن هذا ليس متاحاً دائماً، لذلك ستعرف في هذه الوحدة تقنيات أكبر لرسم منحني الدالة من خلال حساب التفاضل باستخدام مشتقات الدالة (المشتقة الأولى والمشتقة الثانية) لتحديد فترات تزايد أو تناقص الدالة، وتعيين القيم العظمى والقيم الصغرى المرتبطة بقيم  $s$  (القيم العظمى والصغرى المحلية)، والقيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة متصلة على فترة محددة  $[a, b]$  واتجاه تحذب منحني الدالة (لأعلى أو لأسفل) كما تدرس بعض التطبيقات لاجاد القيم العظمى والصغرى لتساعدك في نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية أخرى.

#### مخرجات التعلم

- في نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:
  - يستخدم المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق.
  - يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة القابلة للاشتقاق.
  - يتعرف ويوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة في فترة مغلقة.
  - يوجد النقاط الحرجة والتحذب لأعلى والتحذب لأسفل ونقط الانقلاب لدالة.
- يوجد العلاقة بين منحني الدالة والمشتقة الأولى.
- يدرس سلوك دالة من حيث اطراد والقيم العظمى والصغرى من خلال المشتقة الأولى.
- يرسم المنحنيات لدوال كثيرة الحدود حتى الدرجة الثالثة فقط.



## المصطلحات الأساسية

Convexity	التحدب	Local Minimum	قيمة صغرى محلية	Increasing Function	دالة متزايدة
Convex Upward	تحدب لأعلى	Local Maximum	قيمة عظمى محلية	Dereasing Function	دالة متناقصة
Convex Downward	تحدب لأسفل	Local Extrema	قيمة قصوى محلية	Maxima and Minima	القيم العظمى والصغرى
Inflection Point	نقطة انقلاب	Absolute Extrema	قيمة قصوى مطلقة	Extrema	القيم القصوى
				Critical Point	نقطة حرجة

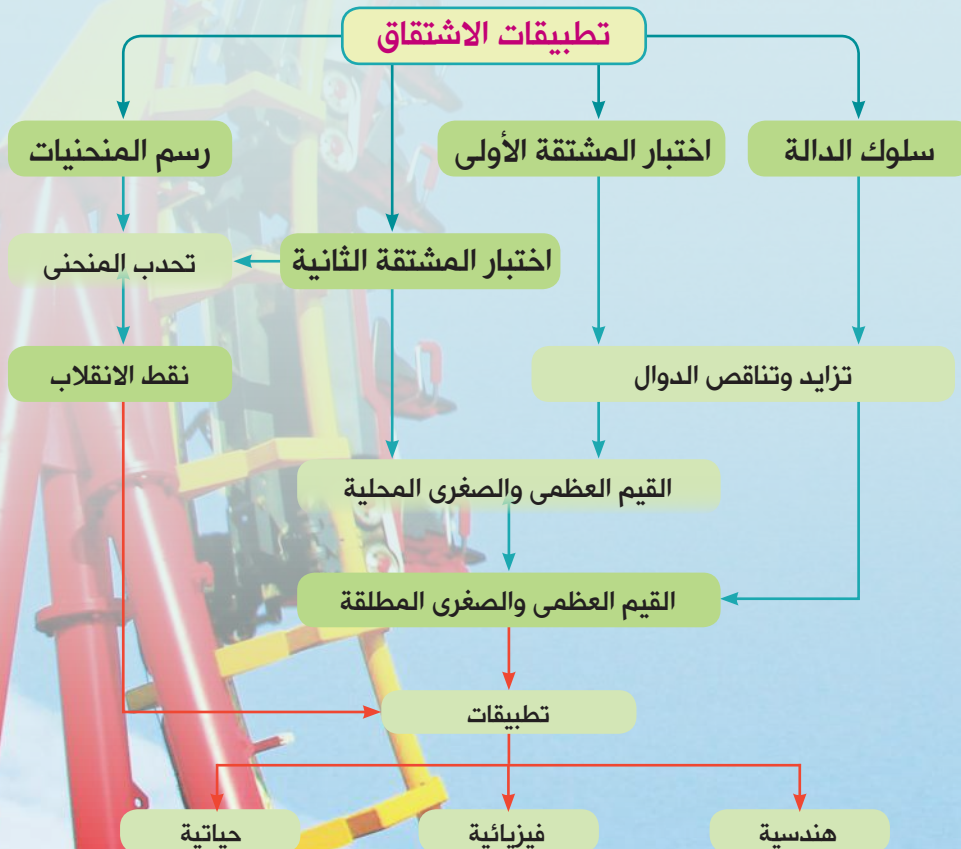
## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى

## دروس الوحدة

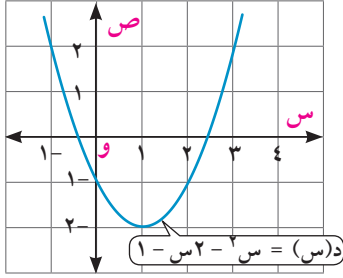
- الدرس (٣ - ١): تزايد وتنقص الدوال.
- الدرس (٣ - ٢): القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)
- الدرس (٣ - ٣): رسم المنحنيات
- الدرس (٣ - ٤): تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

## مخطط تنظيمي للوحدة



# تزايد وتناقص الدوال

## Increasing and Decreasing Functions



### فكر و ناقش

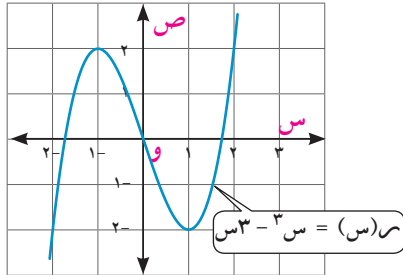
توضح الأشكال المقابلة منحنى الدالتين د ، س حيث

$$\begin{aligned} \text{د (س)} &= \text{س}^2 - ٢\text{س} - ١ \\ \text{س (س)} &= \text{س}^3 - ٣\text{س} \end{aligned}$$

حدد فترات تزايد أو تناقص الدالة د

أوجد مشتقة الدالة د وابحث إشارة د' (س) لقيم س المختلفة التي تنتمي لفترة التزايد

إبحث إشارة د' (س) لقيم س المختلفة التي تنتمي لفترة التناقص



كرر ما سبق من خطوات لتحديد إشارة س' (س) في فترات التزايد وفترات التناقص للدالة س، ماذا تستنتج؟ وما نوع الزاوية التي يصنعها مماس المنحنى عند قيم س المختلفة في فترات التزايد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؟

### تعلم

## اختبار المشتقة الأولى للدوال المطرودة

First Derivative Test for Monotonic Functions

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة [أ، ب] :

١- إذا كان د' (س) < ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب]

فإن د متزايدة على الفترة [أ، ب]

٢- إذا كان د' (س) > ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب]

فإن د متناقصة على الفترة [أ، ب]

### سوف تتعلم

- استخدام المشتقة الأولى في تحديد فترات تزايد أو تناقص دالة.
- تطبيقات حياتية على فترات تزايد وتناقص الدالة.

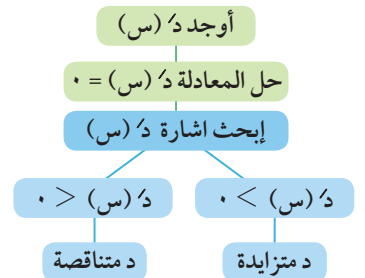
### المصطلحات الأساسية

- دالة متزايدة Increasing Function
- دالة متناقصة Decreasing Function

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

### بحث اطراد دالة



## مثال

### تحديد فترات التزايد والتناقص

١ حدد فترات التزايد وفترات التناقص الدالة د حيث  $د(س) = س^3 - ٣س^2 + ٢$

#### الحل

∴ د(س) =  $س^3 - ٣س^2 + ٢$  دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على  $ع$

$$∴ د'(س) = ٣س^2 - ٦س = ٣(س - ٢)(س - ١)$$

بوضع د'(س) = ٠ فيكون:  $٣(س - ٢)(س - ١) = ٠$

$$∴ د'(س) = ٠ عندما س = ١، س = ٢$$

نبحث إشارة د'(س) في كل من هذه الفترات كما في جدول التغيرات المقابل فنجد:

س	$∞ -$	$١ -$	$١$	$٢$	$∞$
إشارة د'(س)	+	+	-	+	+
سلوك د(س)	↗	↗	↘	↗	↗

د متزايدة على الفترة  $[-∞، ١]$

د متناقصة على الفترة  $[١، ٢]$

د متزايدة على الفترة  $[٢، ∞]$

#### لاحظ أن:

١ عند رسم منحنى الدالة د بأحد البرامج الرسومية (الشكل المقابل)

نجد أن سلوك منحنى الدالة يطابق ما تم استنتاجه بجدول التغيرات.

٢ المماس للمنحنى يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات في فترات التزايد وزاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب

لمحور السينات في فترات التناقص.

٣ قيم س التي تفصل بين فترات التزايد والتناقص للدالة هي القيم التي تكون عندها المشتقة الأولى للدالة تساوي

صفرًا أو غير موجودة

## ٤ حاول أن تحل

١ حدد فترات التزايد وفترات التناقص لكل مما يأتي:

أ د(س) =  $س^3 - ٩س^2 + ١٥س$

ب  $س(س) = \frac{س}{س^2 + ١}$

### دوال مثلثية

## مثال

٢ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث  $د(س) = س + ٢ جاس$ ،  $٠ < س < \pi$

#### الحل

س	$∞ -$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi}{٣}$	$∞$
إشارة د'(س)	+	+	-	+	+
سلوك د(س)	↗	↗	↘	↗	↗

د متصلة وقابلة للاشتقاق على  $[٠، \pi]$

$$∴ د'(س) = ١ + ٢ جاس$$

نبحث إشارة د'(س)

$$٠ = ١ + ٢ جاس$$

$$∴ جاس = -\frac{١}{٢}$$

$$∴ س \in [٠، \frac{\pi}{٣}] \cup [\frac{2\pi}{٣}، \pi]$$

$$∴ س = \frac{\pi}{٣} \text{ أو } س = \frac{2\pi}{٣}$$

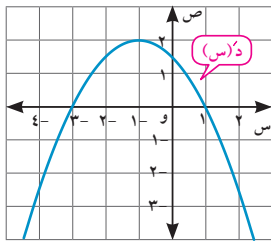


## لاحظ أن:

$$\begin{aligned} \text{عند } s = \frac{\pi}{4} & \quad \text{د/س} = 1 > 0 \quad \therefore \text{د تزايدية على } [0, \frac{\pi}{4}] \\ \text{عند } s = \frac{\pi}{2} & \quad \text{د/س} = 0 > -1 & \quad \therefore \text{د متناقصة على } [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ \text{عند } s = \frac{3\pi}{4} & \quad \text{د/س} = 1 > 0 & \quad \therefore \text{د تزايدية على } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \end{aligned}$$

## ٩ حاول أن تحل

٢ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = س - ٢ جتا س ، ٠ < س <  $\pi$



تفكير ناقذ: يوضح الشكل المقابل منحنى د/س للدالة د حيث د(س) كثيرة الحدود.

أ عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د

ب أوجد مجموعة حل المتباينة د/س < ٠

## مثال

٣ حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د حيث د(س) = ٢ لو س - س<sup>٢</sup>

## الحل

س	٠	١	$\infty$
إشارة د/س	+	٠	-
سلوك د(س)	↗	↘	↘

د(س) قابلة للاشتقاق لكل س  $\exists \mathbb{R}^+$

$$د'(س) = \frac{2}{س} - ٢س = \frac{٢(١ - س^٢)}{س}$$

بحث إشارة د'(س)

عندما د'(س) = ٠ :  $\therefore س = ١$  أو  $س = -١$   $\notin \mathbb{R}^+$

عند س > ١ : د'(س) < ٠ وتكون د تزايدية على [٠, ١]

عند س < ١ : د'(س) > ٠ وتكون د تناقصية على [١,  $\infty$ ]

## ٩ حاول أن تحل

٣ حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د حيث د(س) = س - هـ س ، وباستخدام برنامج GeoGebra ارسم منحنى الدالة د وتحقق من إجابتك.



### تمارين ٣ - ١



حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د في كل مما يأتي:

- ① د (س) = س<sup>٢</sup> - ٤س  
 ② د (س) = (س - ٣)<sup>٢</sup>  
 ③ د (س) = س<sup>٣</sup> - ٢س - ٥  
 ④ د (س) = ٩س - س<sup>٣</sup>  
 ⑤ د (س) = س<sup>٤</sup> + ٤س  
 ⑥ د (س) = ٣ - ٢(س - ٢)<sup>٤</sup>  
 ⑦ د (س) = ١ -  $\frac{١}{س}$   
 ⑧ د (س) =  $\frac{٢-س}{٢+س}$   
 ⑨ د (س) =  $\frac{\sqrt{١-س}}{س}$   
 ⑩ د (س) = س + لو س  
 ⑪ د (س) = ٣ - لو س  
 ⑫ د (س) = ٥ - ٢س<sup>٢</sup>

أجب عما يأتي:

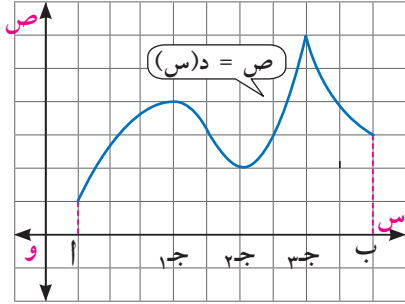
- ⑬ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = ظا س - س متزايدة على الفترة  $[\frac{\pi}{٤}, ٠]$
- ⑭ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = ١ - جاس ،  $٠ < س < \pi$
- ⑮ إذا كانت د ، م دالتين قابلتين للاشتقاق ، د (س) > م (س) لكل س  $\in$  ع ، فأثبت أن الدالة ع حيث ع (س) = د (س) - م (س) متناقصة لكل س  $\in$  ع.

# القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

## Maxima and Minima (Extrema)

### فكر و ناقش

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة  $f$  المتصلة على  $[a, b]$



- ١- حدد فترات تزايد وتناقص الدالة  $f$
  - ٢- عند  $s = c$  ما قيمة  $f'(c)$ ؟ صف تغير  $f$  على الفترة  $[a, c]$  هل  $f(c)$  أكبر قيم  $f$  في هذه الفترة؟
  - ٣- عند  $s = c$  ما قيمة  $f'(c)$ ؟ صف تغير  $f$  على الفترة  $[c, b]$  هل  $f(c)$  أصغر قيم  $f$  في هذه الفترة؟
  - ٤- هل يمكن إيجاد قيمة  $f'(c)$ ؟ فسر إجابتك.
- صف تغير  $f$  على الفترة  $[c, b]$  هل  $f(c)$  أكبر قيم  $f$  في هذه الفترة؟

### النقطة الحرجة Critical Point

للدالة  $f$  المتصلة على الفترة  $[a, b]$  [نقطة حرجة (جـ، د)  $f'(c) = 0$  أو الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $s = c$ ]. إذا كانت  $f(c) \geq f(x)$   $\forall x \in [a, b]$  أو  $f(c) \leq f(x)$   $\forall x \in [a, b]$  أو الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $s = c$ .

تعريف:

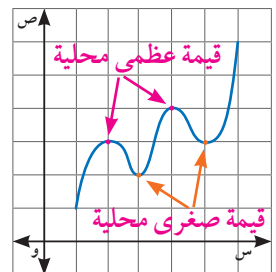
في الشكل السابق نستنتج أن: توجد نقط حرجة عند  $s = c$ ،  $s = c$  لأن  $f'(c) = 0$  أو  $f'(c)$  غير معرف. ويطلق عليها أحيانا نقطة التوقف stationary point، كما توجد نقطة أخرى حرجة عند  $s = c$  لأن  $f$  متصلة عند  $s = c$  وغير قابلة للاشتقاق (المشتقة اليمنى  $\neq$  المشتقة اليسرى).

### القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية

#### Local Maximum and Local Minimum

إذا كانت  $f$  دالة متصلة، مجالها  $f$ ،  $c \in [a, b]$  فإنه يوجد للدالة  $f$  قيمة عظمى محلية عند  $s = c$  إذا وجدت فترة مفتوحة  $[a, b]$   $f(c) \geq f(x)$  لكل  $s \in [a, b]$  تحوي  $c$  بحيث يكون  $f(c) \geq f(x)$  لكل  $s \in [a, b]$  تحوي  $c$  بحيث يكون  $f(c) \leq f(x)$  لكل  $s \in [a, b]$  تحوي  $c$  إذا وجدت فترة مفتوحة  $[a, b]$   $f(c) \leq f(x)$  لكل  $s \in [a, b]$  تحوي  $c$ .

تعريف:



### سوف تتعلم

- مفهوم النقطة الحرجة.
- مفهوم القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة.

### المصطلحات الأساسية

- نقطة حرجة Critical point
- قيمة عظمى محلية Relative Maximum
- قيمة صغرى محلية Relative Minimum
- قيم قصوى مطلقة Absolute Extrema

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

لاحظ أن :

في بند فكر وناقش: توجد قيم عظمى محلية عند  $s = 1$  ،  $s = 3$  ، بينما توجد قيمة صغرى محلية عند  $s = 7$

First Derivative Test for relative maximum and relative minimum

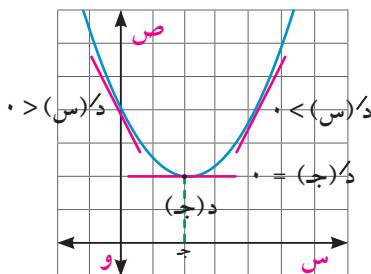
اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية

تعلم

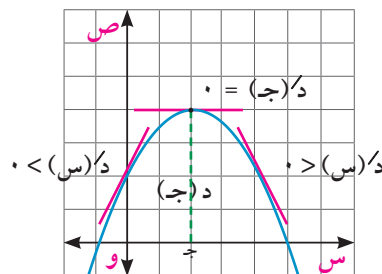


إذا كانت (ج، د) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند ج، ووجدت فترة مفتوحة حول ج بحيث:

- ١-  $D(s) < 0$  عندما  $s > ج$  ،  $D(s) > 0$  عندما  $s < ج$  ، فإن د (ج) قيمة عظمى محلية
- ٢-  $D(s) > 0$  عندما  $s > ج$  ،  $D(s) < 0$  عندما  $s < ج$  ، فإن د (ج) قيمة صغرى محلية



د (ج) قيمة صغرى محلية عند ج



د (ج) قيمة عظمى محلية عند ج

٣- إذا لم يحدث تغير في إشارة  $D(s)$  على جانبي ج، فإنه لا يوجد للدالة د قيم عظمى أو صغرى محلية عند ج...

إذا كانت د دالة متصلة على  $[a, b]$  وكانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند ج  $\in [a, b]$  فإن  $D(ج) = 0$  أو  $D(ج)$  غير موجودة.

نقطة

اختبار المشتقة الأولى

مثال

١) إذا كان  $D(s) = s^3 + 3s^2 - 9s - 7$  أوجد القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة د

الحل

١) تحديد النقاط الحرجة: د متصلة وقابلة للاشتقاق

$$\therefore D(s) = s^3 + 3s^2 - 9s - 7$$

$$= (s^3 + 3s^2 - 9s - 7) = (s - 1)(s^2 + 4s + 7)$$

$$\text{عندما } D(s) = 0 \therefore s = -3 \text{ أو } s = 1$$

لدينا نقطتان حرجتان  $(-3, D(-3))$  ،  $(1, D(1))$

أى النقطتان:  $(-3, 20)$  ،  $(1, -12)$

حدد النقط الحرجة	إبحث إشارة $D'(s)$	$+$ ← عظمى محلية $-$ ← صغرى محلية
------------------------	--------------------------	--------------------------------------

س	$\infty -$	$3 -$	$1 -$	$\infty$	
إشارة د' (س)	+	•	-	•	+
سلوك د (س)		$\nearrow 20$	$\searrow 12 -$		

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة ويوضحه

جدول التغيرات المقابل

٣) في جوار س = ٣- تتغير إشارة د' (س) من موجبة

(قبل س = ٣-) إلى سالبة (بعد س = ٣-)

∴ د (٣-) = ٢٠ قيمة عظمى محلية.

وفي جوار س = ١ تتغير إشارة د' (س) من سالبة (قبل س = ١) إلى موجبة (بعد س = ١)

∴ د (١) = ١٢- قيمة صغرى محلية.

٩ حاول أن تحل

١) إذا كان د (س) =  $\frac{1}{3}س^3 - ٩س + ٣$  ، أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د

مثال

المشتقة الأولى غير موجودة

٢) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د إذا كان د (س) =  $\frac{2}{3}س^3 - ٥س + ٢$

الحل

الدالة د مجالها ع ومتصلة لكل س  $\in \mathbb{R}$

١) تحديد النقط الحرجة:

$$د'(س) = \frac{2}{3}س^2 - ٥ = 0 \Rightarrow س^2 = \frac{15}{2} \Rightarrow س = \pm \sqrt{\frac{15}{2}}$$

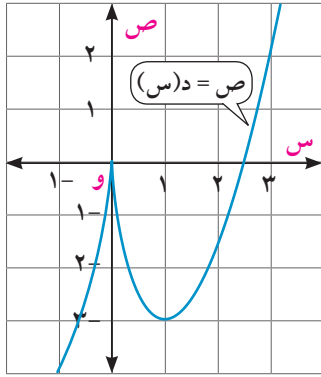
$$س \neq 0 \quad \frac{(١-س)١٠}{س^3} = \frac{[٢-س+٥-٣]٢}{س^3} =$$

∴ د متصلة عند س = ٠ ، د'(٠) غير موجودة

∴ توجد نقطة حرجة هي (٠ ، ٠) أي (٠ ، ٠)

عندما د'(س) = ٠ ∴ س = ١ ويوجد عندئذ نقطة حرجة

هي (١ ، ١) أي (١ ، ١) كما يوضحها الشكل المقابل .



س	$\infty -$	$1 -$	$1$	$\infty$
إشارة د' (س)	+	غير موجودة	-	+
سلوك د (س)		↗	↘ ٣-	

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه

جدول تغيرات الدالة المقابل.

٣) عند س = ٠ توجد قيمة عظمى محلية = ٠

عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية = ٣-

٩ حاول أن تحل

٢) أثبت أن للدالة د حيث د (س) =  $\sqrt[3]{س} - ٤س$  قيمة صغرى محلية.

تفكير ناقذ: هل للدالة د حيث د (س) =  $س^3 + ٣س - ٤$  قيم عظمى وصغرى محلية؟ فسر إجابتك.





### دوال كسرية

مثال

٣ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  حيث  $x \in (1, 5)$  مبيّنًا نوعها

الحل

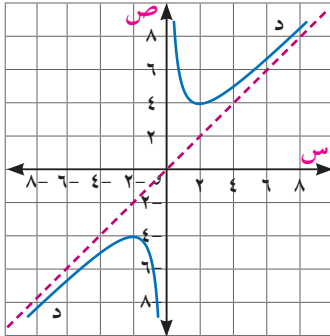
مجال  $D = \{x \mid x \neq 1\}$

١ تحديد النقط الحرجة:  $f'(x) = \frac{2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 1$  (نقطة غير حرجية) ،  $f'(x) = \frac{2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 1$  (نقطة غير حرجية) ،  $f'(x) = \frac{2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 1$  (نقطة غير حرجية)

س	$-\infty$	$1^-$	$1^+$	$2$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$ (س)	+	-	+	-	+
سلوك $f(x)$ (س)		$-\infty$	$+\infty$	$f(2) = 4$	

٢ اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجية يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل (لاحظ استبعاد  $x = 1$  من مجال  $D$ ).

٣ عند  $x = 2$  توجد قيمة عظمى محلية  $f(2) = 4$  وعند  $x = 1$  توجد قيمة صغرى محلية  $f(1) = 1$



لاحظ أن: قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية للدالة

تكنولوجيا: يبين الشكل المقابل منحنى الدالة  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  باستخدام أحد البرامج الرسومية، قارن بين جدول تغيرات الدالة ومنحنائها. ماذا تلاحظ؟

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  حيث  $x \in (1, 5)$  مبيّنًا نوعها

تعلم

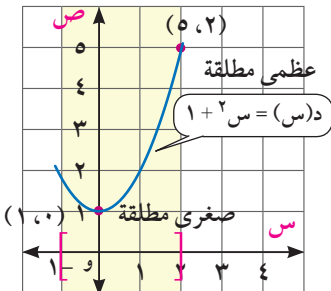
The Absolute Extrema of a Function on a Closed Interval

### القيم القصوى للدالة على فترة مغلقة

تعريف القيم القصوى : إذا كانت دالة معرفة على الفترة المغلقة  $[a, b]$  وكانت  $J \in [a, b]$

١  $J$  هي قيمة صغرى على الفترة  $[a, b]$  عندما يكون  $f(J) \leq f(x)$  لكل  $x \in [a, b]$

٢  $J$  هي قيمة عظمى على الفترة  $[a, b]$  عندما يكون  $f(J) \geq f(x)$  لكل  $x \in [a, b]$

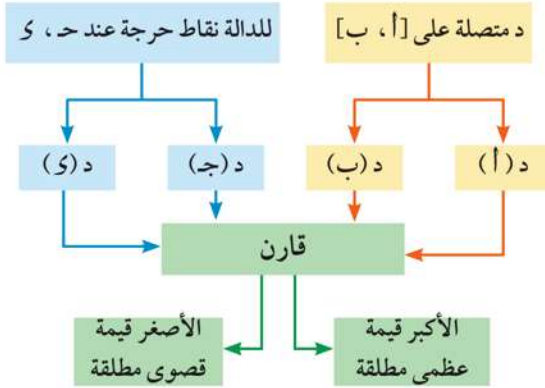


القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة على فترة تسمى القيم القصوى للدالة على هذه الفترة.

القيمة القصوى يمكن أن تحدث عند أي نقطة داخل الفترة أو على حدود الفترة وعندما تحدث عند حدود الفترة تسمى نقطة حدية قصوى

إذا كانت الدالة متصلة على الفترة  $[a, b]$  فإن للدالة قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة  $[a, b]$ .

نقطة



لايجاد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المغلقة [أ ، ب] نتبع المخطط المقابل كما يلي:

٤ احسب د (أ) ، د (ب) ، وقيمة الدالة عند كل نقطة حرجية.

٤ قارن بين القيم السابقة؛ أكبر هذه القيم هو قيمة عظمى مطلقة وأصغرها هو قيمة صغرى مطلقة.

مثال

٤ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د (س) =  $س^3 - ١٢س + ١٢$  ، س  $\in [-٣ ، ٣]$

الحل

∴ د (س) =  $س^3 - ١٢س + ١٢$  ، س  $\in [-٣ ، ٣]$

(١) ∴ د (٣-) =  $٣(-) - ١٢(٣-) + ١٢ = ٢١$

(٢) د (٣) =  $٣(٣) - ١٢(٣) + ١٢ = ٣$

د (س) =  $٣ = ٣^2 - ١٢(٣) + ١٢ = ٣$  (س = ٣)

لتحديد النقط الحرجة نضع د'(س) = ٠

∴ س = ٢  $\in [-٣ ، ٣]$  أو س = -٢  $\in [-٣ ، ٣]$

(٣) عند س = ٢ توجد نقطة حرجية ويكون: د (٢) = -٤

(٤) عند س = -٢ توجد نقطة حرجية ويكون: د (-٢) = ٢٨

بمقارنة قيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن:

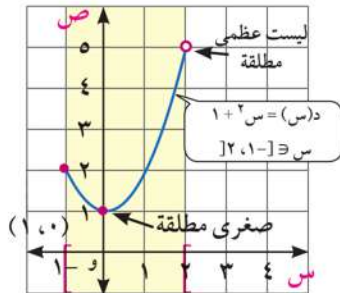
للدالة د قيمة عظمى مطلقة = ٢٨ ، قيمة صغرى مطلقة = -٤

٦ حاول أن تحل

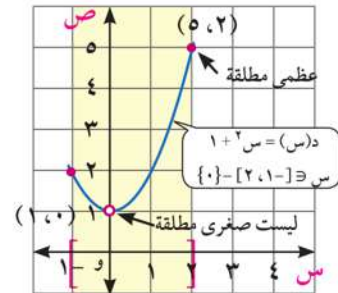
٤ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د

أ د (س) =  $١٠س - س^٣$  س  $\in [٤ ، ٠]$  ب د (س) =  $\frac{س^٤}{١+س}$  س  $\in [-١ ، ٣]$

لاحظ أن



شكل (٢)



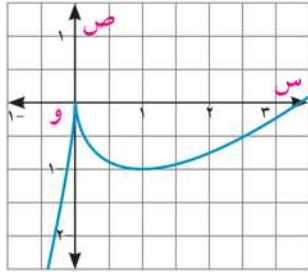
شكل (١)



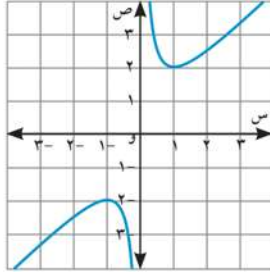
## تمارين ٢ - ٣



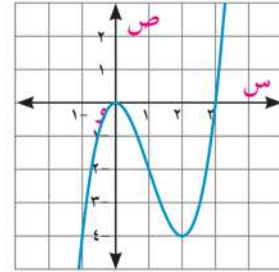
حدد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د في الأشكال التالية وبين نوعها:



٣



٢



١

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د في كل مما يأتي مبيناً نوعها:

٥ د (س) =  $س^٢ - ٤س$

٤ د (س) =  $س^٣ + ٣س^٢ + ٢$

٧ د (س) =  $س^٣ - ٥س$

٦ د (س) =  $س^٤ - س$

٩ د (س) =  $(س + ٢)^{\frac{٢}{٣}}$

٨ د (س) =  $س^{\frac{٢}{٣}} - ٣$

١١ د (س) =  $س + \frac{٤}{١-س}$

١٠ د (س) =  $س + \frac{٤}{س}$

١٣ د (س) =  $٤هـ - س^٢$

١٢ د (س) =  $\frac{٣}{س-٢}$

١٥ د (س) =  $هـس + هـس^-$

١٤ د (س) =  $هـس (٣ - س)$

١٧ د (س) =  $٨لو س - س^٢$

١٦ د (س) =  $س - لو س$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة:

١٨ د (س) =  $س^٣ - ٣س + ١$ ،  $س \in [-٢, ١]$

١٩ د (س) =  $\sqrt{١-س}$ ،  $س \in [٠, ٢]$

٢٠ د (س) =  $جاس + جتاس$ ،  $س \in [٠, \pi]$

٢١ د (س) =  $س هـس^-$ ،  $س \in [٠, ٢]$

أجب عما يلي:

٢٢ **تفكير ابداعي:** أوجد قيم أ، ب، ح، ك بحيث يحقق المنحنى د (س) =  $اس^٣ + بس^٢ + جس + ك$  الشروط التالية معاً:

ب له نقطة حرجة عند  $س = ١$

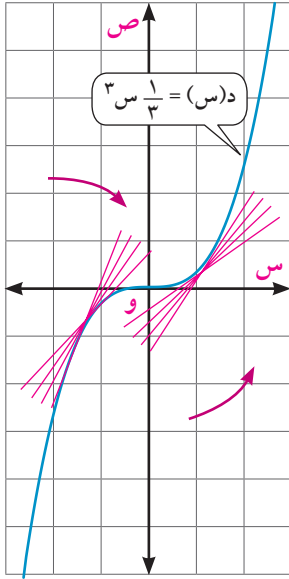
أ يمر بنقطة الأصل.

ج معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٢، د(٢)) عليه هي  $٩س + ص = ٢٠$

## رسم المنحنيات

## Curve Sketching

## استكشف



يبين الشكل المقابل منحنى الدالة  $y = \frac{1}{3}x^3$  حيث:

$$d(s) = \frac{1}{3}s^3, s \in \mathbb{R}$$

**لاحظ أن** الدالة  $y = \frac{1}{3}x^3$  متزايدة على  $\mathbb{R}$  لماذا؟

هل يختلف اتجاه تقوس (تحدب) المنحنى في الفترة

$[-\infty, 0]$  عن اتجاه تحدبه في الفترة  $[0, \infty]$  ؟

في الفترة  $[-\infty, 0]$  ما موقع منحنى الدالة بالنسبة

إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس  $d'(s)$  أم

يتناقص بزيادة قيم  $s$ ؟

في الفترة  $[0, \infty]$  ما موقع منحنى الدالة بالنسبة إلى

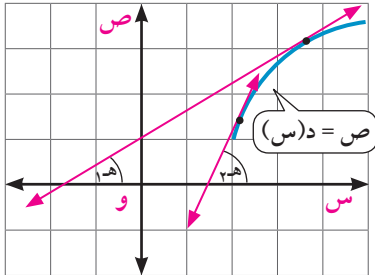
جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس  $d'(s)$  أم

يتناقص بزيادة قيم  $s$ ؟ ماذا تستنتج؟

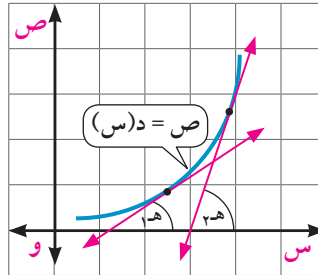
Convexity of a curves

## تحدب المنحنيات

لتكن  $d$  دالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $[a, b]$  ، يكون منحنى الدالة  $d$  محدبًا لأسفل إذا كانت  $d'$  متزايدة على هذه الفترة ، ومحدبًا لأعلى إذا كانت  $d'$  متناقصة على هذه الفترة.



المنحنى محدب لأعلى  
 $d'$  متناقصة وتكون مشتقتها سالبة  
أي  $d''(s) < 0$



المنحنى محدب لأسفل  
 $d'$  متزايدة وتكون مشتقتها موجبة  
أي  $d''(s) > 0$

إذا كان للدالة  $d$  مشتقة ثانية غير صفيرية فيمكن من خلالها دراسة تزايد وتناقص المشتقة الأولى  $d'$  وتحديد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة  $d$ .

## سوف تتعلم

- تحديد فترات تحدب منحنى دالة لأعلى ولأسفل.
- إيجاد نقط الانقلاب لمنحنى دالة.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية.
- رسم المنحنيات.

## المصطلحات الأساسية

- التحدب Convexity
- تحدب لأعلى Convex upward
- تحدب لأسفل Convex downward
- نقطة انقلاب Inflection point

## الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

## The Second Derivative Test for Convexity

## اختبار المشتقة الثانية لتحديد المنحنيات

### نظريّة

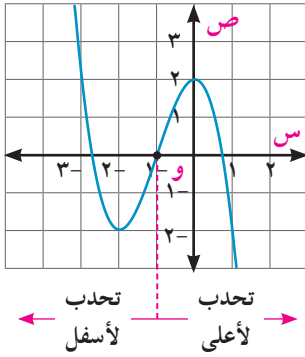
- لتكن د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة  $I$ ،  $a \in I$ ،
- ١- إذا كان  $d''(s) < 0$  لجميع قيم  $s \in I$ ،  $a \in I$  فإن منحنى د يكون محدباً لأسفل على الفترة  $I$ ،  $a \in I$
- ٢- إذا كان  $d''(s) > 0$  لجميع قيم  $s \in I$ ،  $a \in I$  فإن منحنى د يكون محدباً لأعلى على الفترة  $I$ ،  $a \in I$

### مثال

#### تحديد فترات تحدب كثيرات الحدود

- ١) إذا كان د (س) =  $2 - 3s^2 + s^3$  عيّن الفترات التي يكون فيها منحنى الدالة د محدباً لأعلى، والفترات التي يكون فيها محدباً لأسفل.

### الحل



د متصلة وقابلة للاشتقاق لكل  $s \in \mathbb{R}$  حيث:

$d'(s) = 6s - 6 = 0 \Rightarrow s = 1$ ،  $d''(s) = 6$ ،  $d''(s) = 6 > 0$  عند  $s = 1$ .

س	$-\infty$	$1$	$+\infty$
إشارة $d''$	+	0	-
تحدب منحنى د	تحدب لأسفل	نقطة انقلاب	تحدب لأعلى

فترات التحدب: يبين الجدول

المقابل إشارة  $d''$  وفترات تحدب

منحنى الدالة د لأعلى ولأسفل،

أي إن: منحنى الدالة محدب

لأسفل في الفترة  $[-\infty, 1]$ ،  $1$ ، ومحدب لأعلى في الفترة  $[1, +\infty]$

### ٤ حاول أن تحل

- ١) حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لكل من المنحنيات التالية:

أ) د(س) =  $2s^3 - 4s^2 + 2$  ب) م(س) =  $s^4 - s^3$

**تكنولوجيا:** باستخدام أحد البرامج الرسومية إرسم منحنى الدالتين د، م حيث م(س) =  $\sqrt[3]{s}$ ، د(س) =  $s^{\frac{4}{3}}$  وحدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل وحقق إجابتك باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

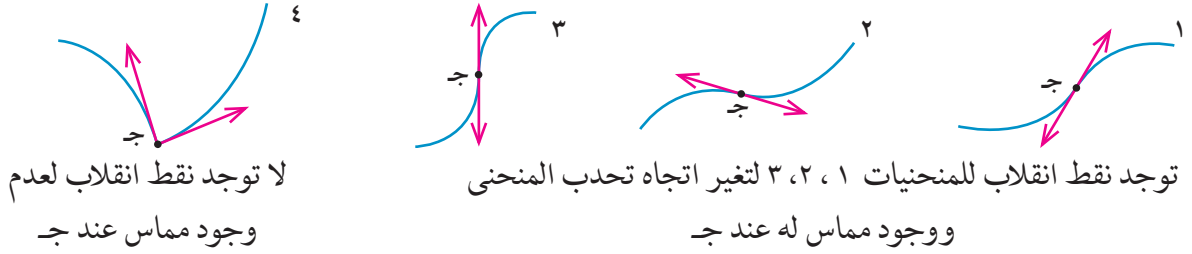
**لاحظ أن:** قد يتغير اتجاه تحدب منحنى الدالة المتصلة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى عند نقطة تنعدم عندها المشتقة الثانية للدالة أو تكون غير موجودة.

### نقطة الانقلاب Inflection point

### نظريّة

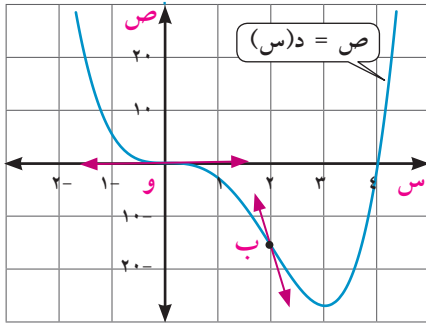
إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة  $I$ ،  $a \in I$ ،  $a \in I$  وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (ج، د). فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل.





لاحظ أن:

١- المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة، لأن المنحنى في إحدى جهتي هذه النقطة يقع تحت المماس ، وفي الجهة الأخرى يقع فوق المماس.



٢- في الشكل المقابل يوجد لمنحنى الدالة د نقطتي انقلاب الأولى عند نقطة الأصل و (٠، ٠) والأخرى عند النقطة ب (٢، د(٢)).

مثال

### التحذب ونقط الانقلاب

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - ٤ \\ \text{عندما } \text{س} > ٢ \\ \text{س}^3 - ٣\text{س} + ٢ \\ \text{عندما } \text{س} \leq ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كانت د(س)}$$

حدد فترات تحذب منحنى د لأعلى ولأسفل ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة المماس عندها إن وجد.

الحل

$$\text{الدالة د متعددة التعريف مجالها ح ، ومتصلة عند س} = ٢ - \text{لأن } \text{د}^-(٢) = \text{د}^+(٢) = \text{د}(٢) = ٠$$

$$\text{د}^-(٢) = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢}$$

$$\text{د}^+(٢) = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢}$$

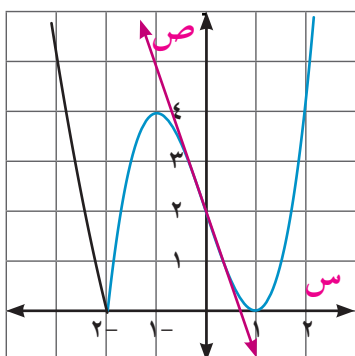
$$= \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢^+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢)}{\text{ه} - ٢}$$




$$\therefore \text{د}^-(٢) \neq \text{د}^+(٢) \therefore \text{الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س} = ٢$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \\ \text{عندما } \text{س} > ٢ \\ \text{س}^3 - ٣\text{س} + ٢ \\ \text{عندما } \text{س} < ٢ \\ \text{غير موجودة عندما } \text{س} = ٢ \end{array} \right\} = \text{د}^-(٢) \neq \text{د}^+(٢)$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ \\ \text{عندما } \text{س} > ٢ \\ \text{س}^6 \\ \text{عندما } \text{س} < ٢ \end{array} \right\} = \text{د}^-(٢) \neq \text{د}^+(٢)$$

يبين الجدول التالي إشارة د/ وفترات تحذب منحني الدالة لأعلى ولأسفل.



س	$\infty$	$0$	$-\infty$
إشارة د	+	غير موجودة	-
تحذب منحنى د			

**فترات التحذب:** منحني د محدب لأسفل في الفترة  $[-\infty, -2]$  ،

الفترة  $[0, \infty]$  ومحدد لأعلى في الفترة  $[-2, 0]$ .

## نقط الانقلاب

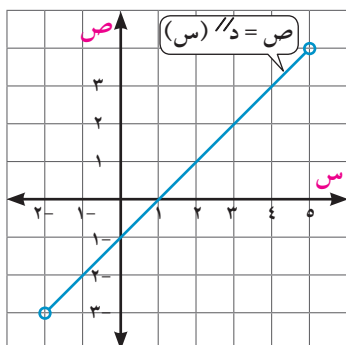
- النقطة (٢-، د(٢-)) أي (٢-، ٠) ليست نقطة انقلاب لمنحني د رغم تغير اتجاه تحدبه حولها، لعدم وجود مماس لمنحني الدالة عند هذه النقطة (د/س) غير موجودة

- النقطة ( ٠ ، د(٠)) أى (٢ ، ٠) هي نقطة انقلاب لمنحنى د لتغير اتجاه تحدبه حولها، ويوجد عندها مماس للمنحنى يقطعه في هذه النقطة ، ميله د/(س) = ٣-، ومعادلته هي : ص - ٢ = ٣- س (كما في الرسم)

**٩** حاول أن تحل

۲) إذا كانت د (س) =  $\left. \begin{array}{l} (س + ۳)^۲ \\ ۳س^۳ - ۲س \end{array} \right\}$  عندما س > ۱  
 عندما س ≤ ۱

حدد فترات التحذب لأعلى والتحذب لأسفل لمنحني الدالة  $d$ ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحني عندها.



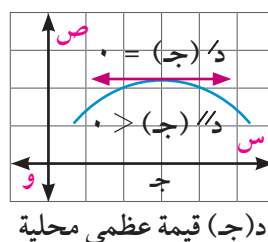
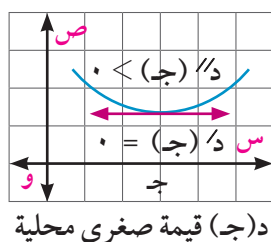
**تفكير ناقد:** يمثل الشكل المقابل منحنى د<sup>٥</sup> (س) على الفترة [ -٢، ٥ ] للدالة المتصلة د.

- هل توجد نقط انقلاّب لمنحني د في هذه الفترة؟ فسر إجابتك.

## اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى أو الصغرى المحلية

لتكن الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوي ج حيث د'(ج) = ٠

- ١) إذا كانت  $d \gg (ج)$  ، فإن  $d$  (ج) قيمة عظمى محلية.
- ٢) إذا كانت  $d \ll (ج)$  ، فإن  $d$  (ج) قيمة صغرى محلية.
- ٣) إذا كانت  $d \approx (ج)$  ، فإن اختبار المشتقة الثانية لا يستطيع تحديد نوع النقطة (ج، د (ج)) من حيث كونها عظمى، محلية أو صغرى محلية.



## مثال

٣ استخدم اختبار المشتقة الثانية في إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث :

$$د(س) = س^٤ - ٨س^٢ + ١٠$$

## الحل

د(س) كثيرة حدود فهي متصلة ومجالها ح

$$د'(س) = ٤س^٣ - ١٦س = ٤س(س^٢ - ٤) ، د''(س) = ١٢س - ١٦$$

للدالة نقط حرجة عندما  $د'(س) = ٤س(س^٢ - ٤) = ٠$  أى عند :  $س = ٠$  ،  $س = ٢$  ،  $س = -٢$  .  
اختبار المشتقة الثانية لوجود قيم عظمى أو صغرى محلية:

$$\text{عند } س = ٠ : د''(٠) = -١٦ < ٠ \therefore \text{قيمة عظمى محلية}$$

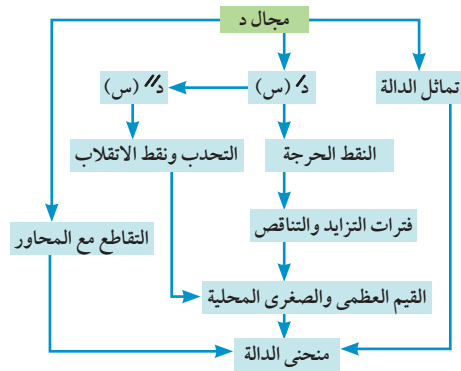
$$\text{عند } س = ٢ : د''(٢) = ٣٢ > ٠ \therefore \text{قيمة صغرى محلية}$$

$$\text{عند } س = -٢ : د''(-٢) = ٣٢ > ٠ \therefore \text{قيمة صغرى محلية}$$

## ٤ حاول أن تحل

٣ باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث  $د(س) = س^٣ - ٣س^٢ - ٩س$  وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الحاسبة البيانية أو البرامج الرسومية.

## Curve Sketching for Polynomials



## رسم الشكل العام لمنحنيات كثيرات الحدود

يستخدم حساب التفاضل في رسم الشكل العام لمنحنيات الدوال، ويعتمد على تتبع سلوك د(س) للدالة د عندما تتغير قيمة س في فترة معينة، وتمثيل الأزواج المرتبة (س ، ص) في المستوى الإحداثي المتعامد حيث  $ص = د(س)$  وسنقصر دراستنا على رسم الشكل العام لمنحنيات الدوال على دوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة فأقل على الصورة  $د(س) = أس^٣ + ب س^٢ + ج س + د$  لرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث  $ص = د(س)$  تتبع المخطط المقابل كما يلي:

١- إذا كانت د زوجية يكون منحنىها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات، ويكون متماثلاً حول نقطة الأصل إذا كانت د فردية.

٢- دراسة تغيرات الدالة وتحديد فترات التحذب ونقط الانقلاب إن وجدت والقيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.

٣- إعداد جدول التزايد والتناقص والتحذب لمعرفة الشكل العام للمنحنى ونوع النقط الحرجة.

٤- إيجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محوري الإحداثيات إن أمكن ذلك .

٥- رسم تخطيطي لمنحنى الدالة ويمكن الاستعانة ببعض النقط الإضافية لتحسين الرسم.

## مثال

### رسم منحنى دالة

٤ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث  $ص = د(س) = س^3 - ٣س^2 + ٤$

### الحل

١- الدالة د كثيرة حدود مجالها  $ع$  ، والدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢-  $د'(س) = ٣س^2 - ٦س = ٣س(س - ٢)$  ،  $د''(س) = ٦س - ٦ = ٦(س - ١)$

للدالة نقط حرجة عند  $د(س) = ٠$  أى عند  $س = ٠$  ،  $س = ٢$

وتكون د متزايدة فى الفترة  $[-٠, \infty)$  ،  $[٠, ٢]$  ومنتقصه فى الفترة  $[٢, \infty)$

$د''(س) = ٠$  عند  $س = ١$

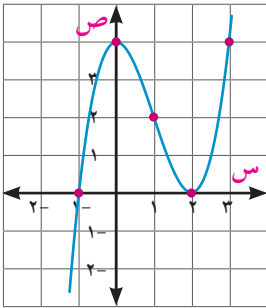
$د''(س) > ٠$  فى الفترة  $[-٠, ١]$  ويكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة،

$د''(س) < ٠$  فى الفترة  $[١, \infty)$  ويكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

النقطة  $(١, ١)$  د(١) أى نقطة انقلاب.

٣- جدول التزايد والتناقص والتحدب  
٤- نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات:  $(٠, ٢)$  ،  $(٤, ٠)$

٥- الشكل العام لمنحنى الدالة د



س	$\infty-$	$١$	$٢$	$\infty$
إشارة د'	+	-	+	+
سلوك د	↗	↘	↗	
إشارة د''	-	+	-	+
تحدب د	↖	↘	↖	
ص	٤	٢	٠	

قيمة عظمى محلية      نقطة انقلاب      قيمة صغرى محلية

نقط إضافية:  $(١, -١)$  د(١) أى  $(٠, -١)$  أى  $(٣, ٣)$  د(٣) أى  $(٤, ٣)$

## ٩ حاول أن تحل

٤ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث  $ص = د(س) = ١٢س - س^3$

## مثال

### الشكل العام لمنحنى دالة

٥ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث  $ص = د(س)$  إذا علمت مايلى:

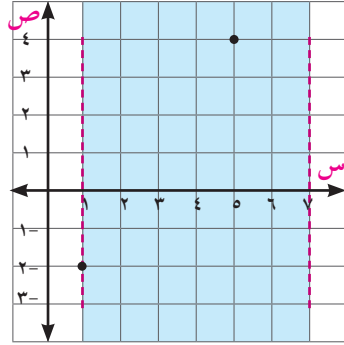
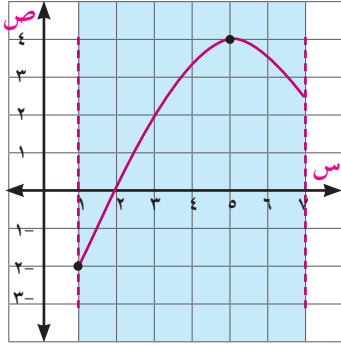
١- د دالة متصلة مجالها  $[١, ٧]$  ،  $د(١) = ٢-$  ،  $د(٥) = ٤$

٢-  $د'(٥) = ٠$  ،  $د'(س) < ٠$  عندما  $س > ٥$  ،  $د'(س) > ٠$  عندما  $س < ٥$

٣-  $د''(س) > ٠$  عندما  $١ > س > ٧$

## الحل

- من (١): نرسم محوري الإحداثيات المتعامدة  
النقطتين (١، ٢)، (٥، ٤) في المجال [١، ٧].
- من (٢): عند  $s = ٥$  المماس // محور السينات، ودمتزايدة  
على الفترة [١، ٥] ومتناقصة على الفترة [٥، ٧]
- من (٣): المنحنى محدب لأعلى على [١، ٧]



## ٤ حاول أن تحل

٥ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث  $s = d(s)$  إذا علمت ما يلي :

١- د متصلة مجالها  $[٠, \infty)$ ،  $d(٤) = ٣$ ،  $d(٠) = ١$  ،  $-٢ < d'(s) < ٠$  عندما  $s < ٠$

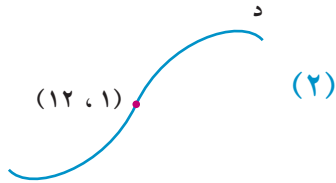
٣-  $d'(s) < ٠$  عندما  $s > ٤$ ،  $d'(٤) = ٠$ ،  $d'(s) > ٠$  عندما  $s < ٤$

## مثال

## حل معادلات

- ٦ إذا كانت النقطة (١٢، ١) هي نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث  $d(s) = ٣س^٢ + ٢س + ١$ ، ب  
الحقيقية.

## الحل



∴ النقطة (١٢، ١) نقطة انقلاب لمنحنى د

∴  $d'(١) = ٠$  ، (١)

$d'(s) = ٣س^٢ + ٢س + ١$  ،  $d'(١٢) = ١٢ = ٣(١٢)^٢ + ٢(١٢) + ١$

من (١):  $٠ = ٣س^٢ + ٢س + ١$

من (٢):  $١٢ = ٣س^٢ + ٢س + ١$

∴  $١٢ = ٣س^٢ + ٢س + ١$  ويكون  $١٢ = ٣س^٢ + ٢س + ١$  ،  $١٨ = ٣س^٢ + ٢س + ١$

## ٤ حاول أن تحل

- ٦ إذا كانت النقطة (٢، ٢) هي نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث  $d(s) = ٣س^٢ + ٢س + ١$ ، ب  
الحقيقية.

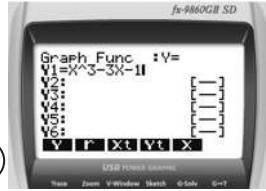
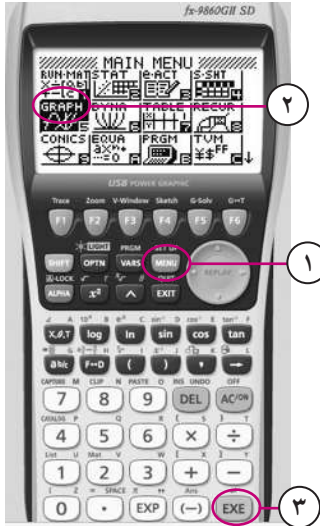




استخدام الحاسبة البيانية في رسم الدوال.

لاستخدام الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د حيث د(س) =  $s^3 - s^2 + 1$  اتبع الخطوات التالية:

١- افتح الحاسبة واضغط MENU ثم تحرك بالأسهم على الشاشة واختر GRAPH، اضغط EXE الذي يعد مفتاح الإدخال لتظهر لك نافذة الكتابة.

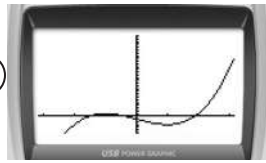


٢- اكتب عند ٢١ في نافذة الكتابة الدالة المراد رسمها حيث يستخدم مفتاح لكتابة المتغير X ولذلك اضغط على المفاتيح التالية:

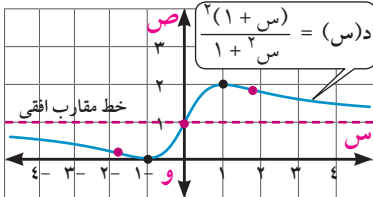
ابدأ → T, θ, X ^ 3 - 3 T, θ, X + 1

٣- لرسم الدالة اضغط EXE ^ EXE فتظهر النافذة الرسومية كما بالشكل المقابل.

٤- استخدم مفتاح  $\Delta$  في النافذة الرسومية لدراسة سلوك الدالة وتحديد فترات التحذب إلى أعلى والتحذب إلى أسفل.



**تكنولوجيا:** بعض الدوال يصعب رسم منحناها البياني. يمكنك باستخدام برنامج geogebra أو أى برنامج رسومي آخر رسم منحنى الدالة ودراسة خواصه.



يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) =  $\frac{s^2 + 1}{s^2 + 1}$ .

لاحظ:

(١) **النقط الحرجة:** للمنحنى نقط حرجة عند س = ١- ، س = ١

عند س = ١- ، د(١-) = ٠ قيمة صغرى محلية، عند س = ١ ، د(١) = ٢ قيمة عظمى محلية.

(٢) **فترات التحذب:** إلى أعلى:  $[-\infty, -\sqrt{3}]$  ،  $[0, \sqrt{3}]$  إلى أسفل:  $[\sqrt{3}, \infty)$  ،  $[-\sqrt{3}, 0]$

(٣) **نقطة الانقلاب:** عند س =  $-\sqrt{3}$  يوجد مماس يقطع منحنى د ، عند س =  $\sqrt{3}$  يوجد مماس يقطع منحنى د

(٤) **الشكل العام للمنحنى:** منحنى الدالة يقترب بطرفيه من المستقيم ص = ١ ويعرف بخط التقارب الأفقى

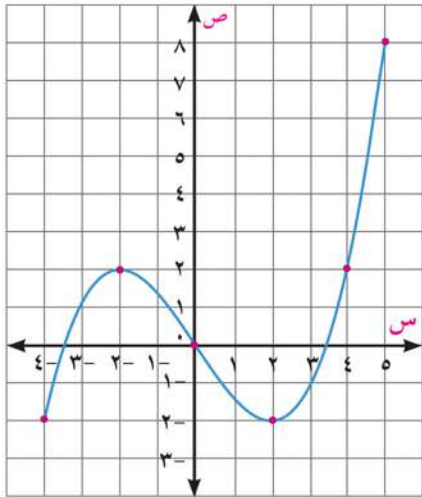
للمنحنى الدالة ومعادلته ص = ١ حيث:  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 + 1}{s^2 + 1} = 1$  ،  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 1}{s^2 + 1} = 1$

**تطبيق:** ارسم منحنىي الدالتين بأحد البرامج الرسومية ثم ادرس خواص كل منهما:

$$\text{د(س)} = \frac{s^4}{s^3 + s^2} \quad \text{س(س)} = \frac{s^4 - s^2}{s^3 + s^2}$$



## تمارين ٣-٣



١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة  $f$  حيث  $f = f(x)$ ، اكمل:

- أ) مجال  $f =$  .....  
 ب)  $f'(x) = 0$  عندما  $x \in$  .....  
 ج)  $f''(x) < 0$  عندما  $x \in$  .....  
 د) المنحنى محدب لأعلى عندما  $x \in$  .....  
 هـ) للمنحنى نقطة انقلاب هي .....  
 و) للدالة قيمة صغرى محلية عند  $x =$  .....  
 ز) للدالة قيمة عظمى مطلقة تساوي .....

ابحث فترات تحذب الدالة  $f$  ثم أوجد إحداثيات نقط الانقلاب (إن وجدت) لكل مما يأتي:

- ٢)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  د(س) .....  
 ٣)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 4$  د(س) .....  
 ٤)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 4$  د(س) .....  
 ٥)  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$  د(س) .....  
 ٦)  $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$  د(س) .....  
 ٧)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$  د(س) .....  
 ٨)  $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \text{ عندما } x \geq 4 \\ x^2 - 20x \text{ عندما } x \leq 4 \end{cases}$  د(س) .....  
 ٩)  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 \text{ عندما } x > 0 \\ x^2 - 4x \text{ عندما } x \leq 0 \end{cases}$  د(س) .....

١٠) أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$  يساوي  $\frac{\pi}{4}$ .

١١) إذا كان لمنحنى الدالة  $f$  حيث  $f(x) = (x^3 - 3x)^2$  قيمة عظمى محلية عند  $x = 1$ ، وقيمة صغرى محلية عند

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

١٢) أوجد  $a, b$  بحيث يكون للمنحنى  $f(x) = x^2 + ax + b$   $x = 2$  نقطة انقلاب عند النقطة  $(1, -1)$ .

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة  $f$  الذي له الخواص المعطاة في كل مما يأتي:

- ١٣) د(٠) = ٤ = د(٣)،  $f'(x) > 0$  لكل  $x > 2$ ،  $f'(x) < 0$  لكل  $x < 2$ ،  $f''(x) < 0$ .  
 ١٤) د(١) = د(٥) = ٠،  $f'(x) > 0$  لكل  $x > 3$ ،  $f'(x) < 0$  لكل  $x < 3$ ،  $f''(x) > 0$  لكل  $x \neq 3$ .  
 ١٥) د(١-) = ٢ = د(٠) = ٤، د(١) = ٠،  $f'(x) = (1-x)$ ،  $f''(x) > 0$  لكل  $x > ٠$ ،  $f''(x) < 0$  لكل  $x < ٠$ .  
 ١٦) د(٣) = ٤، عند  $x > 3$  فإن  $f'(x) < 0$ ، عند  $x < 3$  فإن  $f'(x) > 0$ ،  $f''(x) < 0$ ،  $f''(x) > 0$ .

ادرس تغيرات الدالة د وارسم الشكل العام لمنحنائها في كل مما يأتي:

١٨ د (س)  $= 3 - س^2$

١٧ د (س)  $= 5 - س^2 + س^6$

٢٠ د (س)  $= \frac{1}{3} س^3 - س^2 + 2$

١٩ د (س)  $= 3 - س^3 + س^2 + 3$

٢٢ د (س)  $= - س (س - 3)^2$

٢١ د (س)  $= \frac{1}{8} س^3 - \frac{3}{4} س + 1$

٢٤ د (س)  $= \frac{1}{8} (س + 4) (س - 2)^2$

٢٣ د (س)  $= (س - 2) (س + 1)^2$

٢٦ د (س)  $= |س - 4|$

٢٥ د (س)  $= \left. \begin{array}{l} س^3 - س^2 \text{ عندما } س < 0 \\ س^2 - س^3 \text{ عندما } س \geq 0 \end{array} \right\}$

# تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

٣ - ٤

## Applications of Maxima and Minima

Mathematical Modeling

### النمذجة الرياضية

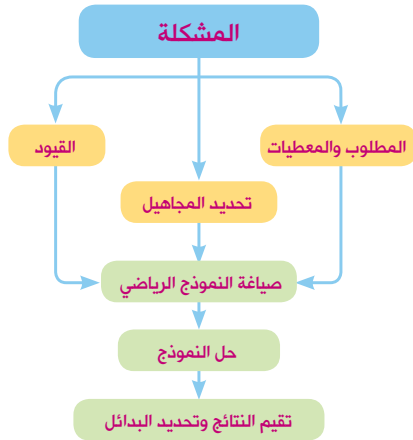
إن عملية اتخاذ قرار علمي في حل أى مشكلة تمر بعدة مراحل تتلخص في:

١- تحديد المشكلة (الهدف والإمكانات).

٢- وضع نموذج فكري أو تصور لأبعاد المشكلة.

٣- إيجاد نموذج علمي مناسب.

٤- حل النموذج واتخاذ القرار.



والنمذجة الرياضية هي صياغة

مشكلة ما وفق علاقات رياضية يطلق

عليها النموذج الرياضي، ويتلخص

في المخطط المقابل حيث يتضمن:

١- تحديد المشكلة المطروحة غايتها

ومكوناتها (ربح أعظم - تكلفة أقل -

مساحة أكبر ...)

٢- تحديد مجاهيل المسألة التي يجب إيجاد قيمها للوصول إلى الغاية المطلوبة.

٣- بيان العلاقات بين المجاهيل (معادلات - متباينات).

٤- صياغة النموذج الرياضي وهو تمثيل للمشكلة بصورة رياضية قابلة للحل.

٥- حل النموذج الرياضي وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة.

٦- تحديد البدائل المتاحة إذا كان للمسألة أكثر من حل واحد.

ويسهم حساب التفاضل في حل النموذج الرياضي لمعظم مشكلات الحياة العملية

حين يكون الهدف هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما في إطار

القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة كما في الأمثلة التالية.

مثال

### اختبار المشتقة الأولى

١ أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث، طول قاعدته

١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع

رأس الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث.

الحل

١- لحساب أكبر مساحة نرسم المسألة تبعاً للمعطيات والقيود.

٢- تحديد المتغيرات (المجاهيل) بفرض أن عرض المستطيل = س سم وطوله ص

سم ومساحته = م سم<sup>٢</sup>

سوف تتعلم

النمذجة الرياضية

المصطلحات الأساسية

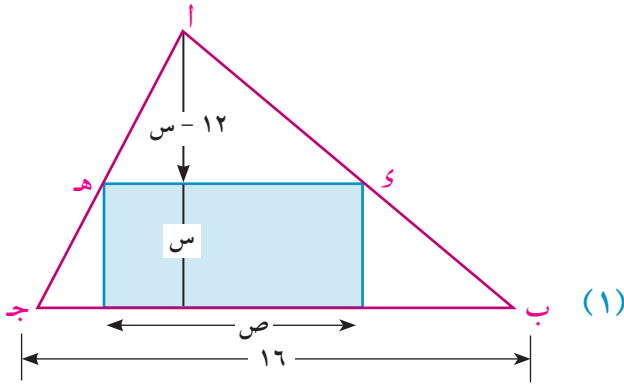
نمذجة رياضية

Mathematical Modeling

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية

برامج رسومية



### ٣- العلاقات بين المتغيرات (النموذج الرياضي)

مساحة المستطيل م = س × ص

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد إن أمكن

$$\frac{ص}{١٦} = \frac{س}{١٢} = \frac{س}{١٢} \quad (\text{من التشابه})$$

$$\therefore ص = \frac{٤}{٣} (١٢ - س), س \in [٠, ١٢]$$

مساحة المستطيل م =  $\frac{٤}{٣} س (١٢ - س)$

$$\text{أى إن: م} = د(س) = ١٦ س - \frac{٤}{٣} س^2$$

٥- حل النموذج الرياضى: باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى س

$$\therefore د'(س) = ١٦ - \frac{٨}{٣} س, د''(س) = -\frac{٨}{٣}$$

$$\text{عند } د'(س) = ٠ \Rightarrow س = \frac{٣ \times ١٦}{٨} = ٦ \text{ ويكون عندها } د''(س) < ٠$$

∴ م لها نقطة حرجة وحيدة عند س = ٦، والمشتقة الثانية سالبة دائماً، فإن هذه النقطة الحرجة تعطى القيمة العظمى المطلقة.

$$\therefore \text{للدالة م قيمة عظمى مطلقة عند س} = ٦, ص = \frac{٨}{٣} (١٢ - ٦) = ٨$$

أى إن: للمستطيل أكبر مساحة عندما يكون بعده ٦ سم، ٨ سم

### ٦ حاول أن تحل

١ أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوى ساقين يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم.

### مثال

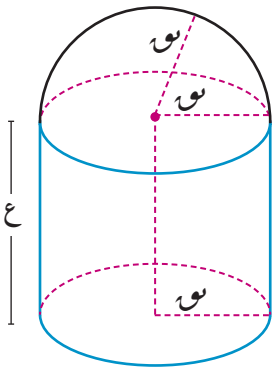
#### حساب أقل تكلفة

٢ يراد بناء صومعة حبوب على شكل أسطوانة رأسية ذات سقف نصف كروي بحيث تتسع لتخزين ١٠٨ م<sup>٣</sup> من الحبوب (يفرض أن تخزين الحبوب يتم فى الجزء الأسطوانى فقط دون السقف)، إذا كانت تكلفة وحدة المساحة من السقف ضعف تكلفة وحدة المساحة من الجدار الجانبى. ما أبعاد الصومعة التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن؟

### الحل

١- لحساب أقل تكلفة نرسم المسألة تبعاً للمعطيات والقيود.

٢- تحديد المتغيرات: نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ع متراً، طول نصف قطر قاعدتها = ر متراً وأن تكلفة وحدة المساحة من الجدار = ج جنيهاً فتكون تكلفة وحدة المساحة من السقف = ٢ ج جنيهاً والتكاليف الكلية = ك جنيهاً.



٣- العلاقات بين المتغيرات (النمذجة):

$$\text{مساحة السطح الأسطوانى} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع} = ٢\pi ر ع \text{ وحدة مساحة}$$



مساحة السطح النصف كرى =  $\frac{1}{4}$  مساحة الكرة =  $\pi^2$  مو<sup>2</sup> وحدة مساحة  
التكاليف الكلية ك =  $\pi^2$  مو<sup>2</sup> ع × ج +  $\pi^2$  مو<sup>2</sup> × ٢ ج =  $\pi^2$  مو<sup>2</sup> ج (ع + ٢ مو)

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد:

∴ حجم الجزء الأسطوانى =  $\pi ١٠٨$   
التكاليف الكلية ك =  $\pi^2$  مو<sup>2</sup> ج (٢ مو +  $\frac{١٠٨}{٢ مو}$ )  
ك = د (مو) =  $\pi ٢١٦$  ج مو<sup>-١</sup> +  $\pi ٤$  ج مو<sup>٢</sup>

٥- حل النموذج: د (مو) =  $\pi ٢١٦$  ج مو<sup>-٢</sup> +  $\pi ٨$  ج مو

النقط الحرجة = عند د (مو) = ٠ ∴  $\frac{٢١٦}{٨} = ٣$  مو ∴ أى إن مو = ٣ (نقطة وحيدة)

اختبار المشتقة الثانية:

∴ د (مو) =  $\pi ٤٣٢$  ج مو<sup>-٣</sup> +  $\pi ٨$  ج ∴ د (٣) < ٠

أى إن: عندما يكون طول نصف قطر الأسطوانة الرأسية ٣ أمتار يكون للصومعة أقل تكاليف، ويكون ارتفاعها عندئذ  $\frac{١٠٨}{٩} = ١٢$  مترًا.

#### ٦ حاول أن تحل

٢ خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ مترًا مكعبًا، وقاعدته مربعة. يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة، يتكلف القاع ٥٠ جنيهاً لكل متر مربع، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيهاً لكل متر مربع، كما يتكلف الجوانب ٣٠ جنيهاً لكل متر مربع، أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

#### مثال

#### تطبيقات حياتية

٣ جدار ارتفاعه ٢ متر ويبعد مترين عن أحد المنازل، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار.

#### الحل

١- لحساب أقصر طول للسلم نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- تحديد المتغيرات: نفرض أن:

طول السلم = ل مترًا، ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ص مترًا، بعد طرف السلم السفلى عن الجدار = س مترًا.

٣- نمذجة المسألة:

(١) من فيثاغورث: ل<sup>٢</sup> = (س + ٢)<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup>

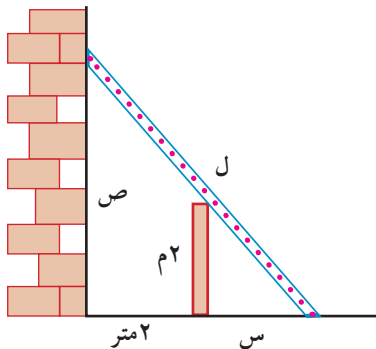
من التشابه:  $\frac{ص}{س} = \frac{٢+س}{س}$

(٢) ∴ ص =  $\frac{س^٢ + ٤}{س}$  =  $\frac{٤}{س} + س$

لإيجاد أقصر طول للسلم يكفى أن تكون ل قيمة صغرى

٤- حل النموذج باشتقاق طرفى العلاقة (١)، (٢) بالنسبة إلى س.

∴  $\frac{د(ل)}{د(س)} = (٢) (س + ٢) × ١ + ص \frac{د(ص)}{د(س)} = \frac{ص}{س} = \frac{٤-}{س^٢}$



$$\therefore \frac{5}{3} (2) = (2 + s)^2 + (2 + \frac{4+s}{3})^2 = \frac{4-s}{3} \times (\frac{4+s}{3})^2 + (2 + s)^2 = \frac{8}{3} (1 - \frac{1}{3}) (2 + s)^2$$

س	٢
إشارة $\frac{5}{3} (2)$	- +
٢	→ →

عند النقطة الحرجة:  $\frac{5}{3} (2) = \text{صفر}$

$$\therefore s = 2 - \text{مرفوض أو } \frac{8}{3} = 1 \quad \therefore s = 2$$

من اختبار المشتقة الأولى للتزايد والتناقص نلاحظ تغير إشارة  $\frac{5}{3} (2)$  من - إلى +

$\therefore$  عند  $s = 2$  تكون  $l$  أصغر ما يمكن

$$\text{بالتعويض في (٢)} \quad \therefore \text{ص} = \frac{4+2 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore l = 2\sqrt{4} = 4 \quad \therefore l = 2(2+2) + 2(4) = 32$$

أي إن: طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل يساوي  $4\sqrt{2}$  مترًا

#### ٩ حاول أن تحل

٣ في مستوى إحداثي متعامد رسم  $\overleftrightarrow{AB}$  يمر بالنقطة جـ (٣، ٢) ويقطع محوري الإحداثيات في النقطة أ والنقطة ب، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ ب تساوي ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل (٠، ٠).

#### مثال

#### القطاع الدائري

٤ قطعة معدنية على شكل قطاع دائري مساحته ١٦ سم<sup>٢</sup> أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذي يجعل محيطه أقل ما يمكن، وما قياس زاويته عندئذ؟

#### الحل

بفرض أن طول قوس القطاع  $l$  سم، طول نصف قطر دائرة القطاع =  $r$  سم

(١)

$\therefore$  محيط القطاع  $C = 2r + l$

$$\therefore l = \frac{32}{r}$$

(٢)

$\therefore$  مساحة القطاع  $= \frac{1}{2} l r = 16$

$$\text{بالتعويض في (١)} \quad \therefore C = 2r + \frac{32}{r}$$

باشتقاق طرفي العلاقة (٢) بالنسبة إلى  $r$

$$\frac{dC}{dr} = \frac{32}{r^2} - 2 = \frac{64}{r^3} = \frac{32}{r^2} \quad \therefore \frac{64}{r^3} = \frac{32}{r^2}$$

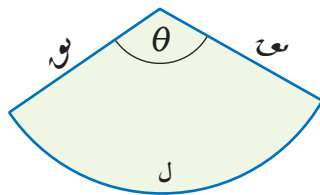
$$\text{عندما } \frac{dC}{dr} = 0 \quad \therefore \frac{64}{r^3} = \frac{32}{r^2} \quad \therefore r = 2$$

$\therefore$  عند  $r = 2$  يكون محيط القطاع أقل ما يمكن

$$\therefore \text{مساحة القطاع} = \frac{1}{2} l r = 16 \quad \therefore \theta = \frac{2 \times 16}{2 \times 2} = 8$$

#### ٩ حاول أن تحل

٤ إذا كان محيط قطاع دائري = ١٢ سم، أوجد قياس زاوية القطاع الذي يجعل مساحته أكبر ما يمكن.



## تمارين ٣ - ٤

- ١ عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن، أوجد العددين.
- ٢ عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥، ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن، أوجد العددين.
- ٣ أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف إليه معكوسه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن.
- ٤ أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تحاط بسيّاج طوله ١٢٠ مترًا.
- ٥ قطاع دائري محيطه ٣٠ سم، ومساحته أكبر ما يمكن، أوجد طول نصف قطر دائرته.
- ٦ علبة على هيئة متوازي مستطيلات، قاعدتها مربعة الشكل. إذا كان مجموع جميع أحرفها يساوى ٢٤٠ سم، فأوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن.
- ٧ إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوى ١٠ سم، فأوجد طول كل من ضلعي القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن.
- ٨ حقل مفتوح يحده من أحد الجوانب نهر مستقيم. حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأ أكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج، وما مساحة هذه الأرض حينئذ؟
- ٩ تُصنع علب أسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات، سعة كل منهما ك من وحدات الحجم بأقل قدر من المادة، أوجد نسبة ارتفاع العلبة (ع) إلى طول نصف قطر قاعدتها (و).
- ١٠ ملعب على شكل مستطيل ينتهى بنصفى دائرتين، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ مترًا، فأوجد أكبر مساحة له.
- ١١ مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠ سم، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.
- ١٢ قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل، بعده ١٥ سم، ٢٤ سم، قُطع من أركانها الأربعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها س سم، ثم تُنبت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء. احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن.
- ١٣ خزان مفتوح، قاعدته مربعة، وجوانبه رأسية، يسع كمية معينة من الماء. أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوى نصف طول ضلع قاعدته.
- ١٤ أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٥، ٠) وتقع على المنحنى  $y = \frac{1}{x} - 4$ .
- ١٥ أوجد أقصر بعد بين المستقيم  $y = 2x + 10$  والمنحنى  $y = x^2 - 4$ .

- ١٦) أ ب ج مثلث حيث أ، ب ثابتان. أوجد قياس الزاوية المحصورة بينهما والتي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.
- ١٧) تُعطى شدة التيار (بالأمبير) في دائرة للتيار المتردد عند أى لحظة ن (ثانية) بالعلاقة  $t = 2 \sin 2\pi n + 2$  جا ن، ما أقصى قيمة للتيار في هذه الدائرة.
- ١٨) ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعة في وسط غذائي طبقاً للعلاقة  $d(n) = 2000 + \frac{5000}{n+100}$ ، حيث الزمن ن مقيس بالساعات، عين القيمة العظمى لحجم المزرعة.
- ١٩) أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم، م  $\ni$  ب ج بحيث ب م = س سم، ن  $\ni$  ج د بحيث ج ن =  $\frac{3}{4}$  س. أوجد قيمة س التي تجعل مساحة  $\triangle$  أ م ن أصغر ما يمكن.
- ٢٠) أ ب قطر في دائرة طول نصف قطرها م. رُسم مماسان للدائرة عند كل من أ، ب من النقطة هـ على الدائرة رسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين من د، ج على الترتيب. أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف أ ب ج د تساوي  $2\sqrt{2}$  وحدة مربعة.



## ملخص الوحدة

### اختبار المشتقة الأولى لاضطراب الدوال:

نظرية: لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $I$ ،  $a \in I$ :

١- إذا كان  $f'(a) < 0$ ، لجميع قيم  $s \in I$ ،  $a \in I$  فإن د متزايدة على  $I$ ،  $a \in I$ .

٢- إذا كان  $f'(a) > 0$ ، لجميع القيم  $s \in I$ ،  $a \in I$ ، فإن د متناقصة على  $I$ ،  $a \in I$ .

### النقطة الحرجة:

للدالة د المتصلة على  $I$ ،  $a \in I$  نقطة حرجة (ج، د) إذا كانت  $a \in I$ ،  $a \in I$ ،  $f'(a) = 0$  أو  $f'(a)$  غير موجودة.

### القيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة

إذا كانت د دالة متصلة مجالها  $I$ ،  $a \in I$  فإنه يوجد للدالة د:

١- قيمة عظمى محلية عند ج إذا وجدت فترة مقترحة  $I$ ،  $a \in I$ ،  $f(a) \geq f(s)$  لكل  $s \in I$ ،  $a \in I$ .

٢- قيمة صغرى محلية عند ج إذا وجدت فترة مفتوحة  $I$ ،  $a \in I$ ،  $f(a) \leq f(s)$  لكل  $s \in I$ ،  $a \in I$ .

### اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية:

إذا كانت (ج، د) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند ج، ووجدت فترة مفتوحة حول ج بحيث:

١-  $f'(s) < 0$  عندما  $s > ج$ ،  $f'(s) > 0$  عندما  $s < ج$ ، فإن د (ج) قيمة عظمى محلية

٢-  $f'(s) > 0$  عندما  $s > ج$ ،  $f'(s) < 0$  عندما  $s < ج$ ، فإن د (ج) قيمة صغرى محلية

نظرية: إذا كانت د قابلة للاشتقاق على  $I$ ،  $a \in I$  وكانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند ج  $a \in I$ ،  $a \in I$  فإن  $f'(a) = 0$ .

### القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة:

نظرية: إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة  $I$ ،  $a \in I$  فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة  $I$ ،  $a \in I$ .

### تحديد المنحنيات

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $I$ ،  $a \in I$ ، يكون منحنى الدالة د محدباً لأسفل إذا كانت د متزايدة على هذه الفترة، ومحدباً لأعلى إذا كانت د متناقصة على هذه الفترة.

### اختبار المشتقة الثانية لتحديد المنحنيات

نظرية: لتكن د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة  $I$ ،  $a \in I$  فإنه:

١- إذا كان  $f''(a) < 0$ ، لجميع قيم  $s \in I$ ،  $a \in I$  فإن منحنى د يكون محدباً لأسفل على الفترة  $I$ ،  $a \in I$ .





## ملخص الوحدة

٢- إذا كان د(س)  $> 0$  لجميع قيم س  $\in [a, b]$  فإن منحنى د يكون محدباً لأعلى على الفترة  $[a, b]$ .

### نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة  $[a, b]$ ، وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (ج، د (ج)). فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل.

### اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى المحلية

نظرية: ليكن للدالة د مشتقة ثانية على فترة مفتوحة تحوى ج حيث د(ج) = 0

١- إذا كانت د(ج)  $> 0$  فإن د(ج) قيمة عظمى محلية.

٢- إذا كانت د(ج)  $< 0$  فإن د(ج) قيمة صغرى محلية.

### منحنيات كثيرات الحدود

لرسم الشكل العام لمنحنى كثيرة الحدود د حيث ص = د(س) نتبع الخطوات التالية:

١- إذا كانت د زوجية يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات، ويكون متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل إذا كانت د فردية.

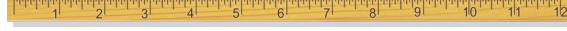
٢- دراسة تغيرات الدالة وتحديد فترات التحدب ونقط الانقلاب والقيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.

٣- إعداد جدول التزايد والتناقص والتحدب لمعرفة الشكل العام للمنحنى ونوع النقط الحرجة.

٤- إيجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محورى الإحداثيات.

٥- رسم تخطيطى لمنحنى الدالة ويمكن الاستعانة ببعض النقط الإضافية لتحسين الرسم.

# تمارين عامة



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا كان د:  $[-2, 4]$  ← ع، د(س) = س<sup>٣</sup> - س<sup>٣</sup> فإن عدد النقط الحرجة للدالة د يساوي:
 

أ ٠      ب ١      ج ٢      د ٣
- ٢ يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د(س) تساوي:
 

أ ٢ - س      ب س<sup>٢</sup> + ١      ج س<sup>٣</sup>      د س<sup>٣</sup> - س<sup>٣</sup>
- ٣ منحنى الدالة د محدباً لأسفل في ع إذا كان د(س) تساوي:
 

أ ٣ - س<sup>٢</sup>      ب ٣ - س<sup>٣</sup>      ج ٣ - س<sup>٤</sup>      د ٣ + س<sup>٤</sup>
- ٤ إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة إنقلاب عند س = ٢ حيث د(س) = س<sup>٣</sup> + ك س<sup>٢</sup> + ٤ فإن قيمة ك تساوي:
 

أ ٦ -      ب ٣ -      ج ٣      د ٦
- ٥ يكون للدالة د قيمة عظمى محلية إذا كانت د(س) تساوي:
 

أ س<sup>٢</sup> - ٢      ب س<sup>٣</sup> + ١      ج س<sup>٣</sup> + س<sup>٣</sup>      د س<sup>٤</sup> - ٢ س<sup>٢</sup>

حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د في كل مما يأتي:

- ٦ د(س) = (س - ٣)<sup>٢</sup>      ٧ د(س) = س<sup>٢</sup> - س<sup>٣</sup>      ٨ د(س) = (س + ٤)<sup>٣</sup>
  - ٩ د(س) = ٥ + س<sup>٤</sup> - س<sup>٢</sup>      ١٠ د(س) = س<sup>٢</sup>(س - ٢)      ١١ د(س) = س<sup>٤</sup> - س<sup>٤</sup> - س<sup>٣</sup>
  - ١٢ د(س) = ١ +  $\frac{1}{س}$       ١٣ د(س) =  $\frac{س}{س^٢ + ٢}$       ١٤ د(س) =  $\sqrt[٢]{١ - س}$
- حدد فترات التحدب لأسفل والتحدب لأعلى ونقط الانقلاب إن وجدت لكل من:

- ١٥ د(س) = (س - ١)<sup>٢</sup>      ١٦ د(س) = س<sup>٣</sup> - س<sup>٣</sup>      ١٧ د(س) = س<sup>٣</sup> - س<sup>٦</sup> + ٩
- ١٨ د(س) = س<sup>٣</sup> - ١٢ س + ٧      ١٩ د(س) = س<sup>٦</sup> - س<sup>٣</sup> - س<sup>٤</sup>      ٢٠ د(س) = س<sup>٢</sup> -  $\frac{٨}{س}$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د إن وجدت في كل مما يأتي:

- ٢١ د(س) = ٤ - س<sup>٦</sup> - س<sup>٢</sup>      ٢٢ د(س) = س<sup>٢</sup> - س<sup>٣</sup> + ٧      ٢٣ د(س) = س(س - ٢)<sup>٢</sup>
- ٢٤ د(س) = س<sup>٤</sup> - ٨ س<sup>٢</sup> + ٨      ٢٥ د(س) =  $\frac{١ - س^٢}{١ + س^٢}$       ٢٦ د(س) =  $\frac{٣ - س^٢}{٢ - س}$
- ٢٧ د(س) =  $\frac{س - ٤}{٩ + س^٢}$       ٢٨ د(س) =  $\sqrt[٢]{٢ - (س - ٢)}$       ٢٩ د(س) =  $\sqrt[٢]{٤ - س^٢}$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة المعطاه لكل مما يأتي:

- ٣٠ د(س) = س<sup>٣</sup> - ٩      ٣١ د(س) = س<sup>٣</sup> - ١٢ س + ١٦      ٣٢ د(س) = س<sup>٤</sup> + ٢
- ٣٣ د(س) = س<sup>٤</sup> - ٢ س<sup>٢</sup> + ١      ٣٤ د(س) = س<sup>٤</sup> - ٢ س<sup>٢</sup> + ١

[٥، ٠]

$$\textcircled{٣٥} \text{ د (س) = (س-١) (س-٢) }^2$$

$$\textcircled{٣٤} \text{ د (س) = س (س-٢) (١٢-٢) } [٤، -١]$$

$$\textcircled{٣٦} \text{ د (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^3 - ٣\text{س}^2 \text{ عندما س} \geq ٠ \\ \text{س}^2 - ٢\text{س} \text{ عندما س} < ٠ \end{array} \right\} [٣، -٣]$$

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى:

$$\textcircled{٣٧} \text{ د (٤) = (٤)، د (٤) = ٠، د (س) > ٠ لجميع قيم س.}$$

$$\textcircled{٣٨} \text{ د (٢) = (٢)، د (٢) = ٠، د (س) < ٠ عندما س > ٢، د (س) > ٠ عندما س < ٢}$$

$$\textcircled{٣٩} \text{ د (٣-) = (٣-)، د (٠) = (٠)، د (٤) = (٣)، د (س) < ٠ عندما س > ٣-، د (س) < ٠ عندما س < ٣-}$$

$$\textcircled{٤٠} \text{ د (س) > ٠ عندما س > ٠، د (س) < ٠ عندما س < ٠}$$

$$\textcircled{٤٠} \text{ د (٠) = (٠)، د (٢) = (٢-)، د (٢-) = ٠، د (س) > ٠ عندما س > ٢، د (س) > ٠ عندما س > ٠}$$

$$\textcircled{٤٠} \text{ د (س) < ٠ عندما س < ٠}$$

ارسم الشكل العام لكل من المنحنيات التالية مبيناً عليها القيم القصوى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت:

$$\textcircled{٤٢} \text{ د (س) = س}^2 - ٤\text{س} + ٣$$

$$\textcircled{٤١} \text{ د (س) = س}^2 - ٤\text{س}$$

$$\textcircled{٤٤} \text{ د (س) = س}^3 - ٣\text{س}^2 + ٤\text{س} + \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{٤٣} \text{ د (س) = س (س+٣) }^2$$

$$\textcircled{٤٦} \text{ د (س) = س}^3 + ٥\text{س} - ٣\text{س}$$

$$\textcircled{٤٥} \text{ د (س) = س}^2 - ٩\text{س} + ١٢\text{س} - ٢$$

$$\textcircled{٤٧} \text{ عين قيم أ، ب ج، د، هـ للمنحنى ص = أ س}^3 + ب س^2 + ج س + د بحيث تكون له قيمة عظمى محلية عند$$

$$(٦، ٠) \text{ وقيمة صغرى محلية عند } (٥، ١) \text{ ثم ارسم المنحنى.}$$

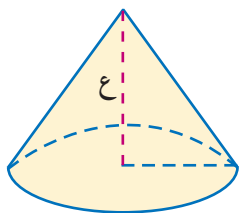
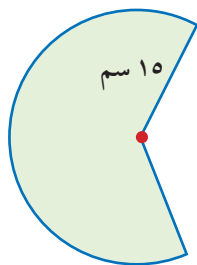
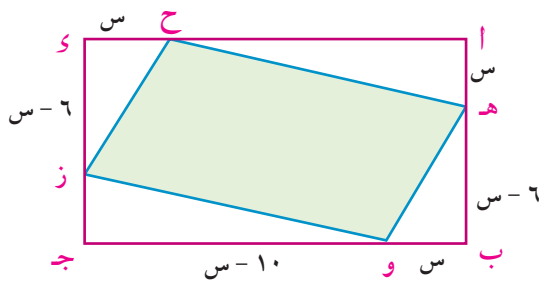
$$\textcircled{٤٨} \text{ سلك طوله ٢٠ متراً يراد تشكيله على هيئة مستطيل. ما هى أبعاد المستطيل التى تجعل المساحة أكبر ما يمكن.}$$

$$\textcircled{٤٩} \text{ فى الشكل المقابل أ ب ج د مستطيل:}$$

$$\textcircled{أ} \text{ أثبت أن الشكل هـ وز ح متوازى أضلاعه مساحته}$$

$$\text{م} = ٢\text{س}^2 - ١٦\text{س} + ٦٠$$

$$\textcircled{ب} \text{ أوجد أصغر قيمة ممكنة للمساحة م.}$$



$$\textcircled{٥٠} \text{ قطعة من الورق على شكل قطاع دائرى طول نصف قطره}$$

$$\text{١٥ سم. طويت لتشكيل سطح مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع سم.}$$

$$\text{بين أن حجم المخروط ح سم}^3 \text{ يعطى بالعلاقة}$$

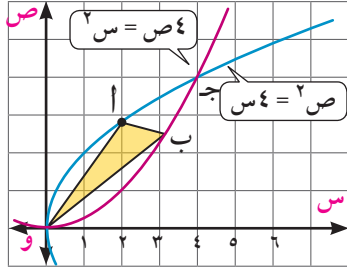
$$\text{ح} = \frac{\pi}{3} \text{ ع (٢٢٥ - ع}^2 \text{)،}$$

$$\text{ثم أوجد أكبر حجم ممكن لهذا المخروط.}$$

٥١ أوجد ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مفرغة طول نصف قطرها من الداخل ١٠ سم، عندما تكون المساحة الجانبية للأسطوانة أكبر ما يمكن.

٥٢ أثبت أنه لجميع قيم  $s \in \mathbb{R}$  تتحقق المتباينة

$$s^2 + \frac{1}{s^2} \geq 2 \quad \text{حيث } s \neq 0$$

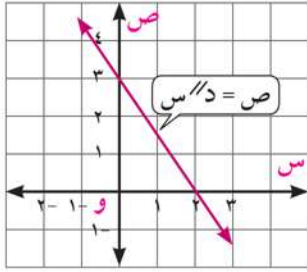


٥٣ لتكن ج نقطة تقاطع المنحنيين  $s^2 = 4$  و  $s = 2$ ، النقطة أ تقع على المنحنى  $s^2 = 4$  وإحداثياتها السيني يساوي ٢، النقطة ب(س، ص) تقع على المنحنى  $s = 2$  بين النقطتين و، ج، أوجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و أ ب

٥٤ خزان مغطى للمياه، مكون من متوازي مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها ٢ س وارتفاعه س، يعلوه أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢ س وارتفاعها ص. إذا كان حجم الخزان الكلي ٢٧ مترًا مكعبًا فاحسب قيمة س التي تجعل مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن.



# اختبار تراكمي



١) يبين الشكل المقابل منحنى د/ص (س) للدالة د، أكمل:

أ) منحنى د محدب لأعلى عندما  $s \geq 0$  .....

ب) منحنى د له نقطة انقلاب عند  $s = 0$  .....

ج) إذا كان  $d'(1) = 0$  فإنه يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية عند  $s = 0$  .....

د) متناقصة لكل  $s \geq 0$  .....

٢) إذا كان  $d'(s) = s + b$  حيث  $a > 0$  .....

أ) ابحث وجود قيمة قصوى للدالة د مبيناً نوعها إن وجدت.

ب) حدد فترات تزايد وتناقص الدالة د عندما  $a = 2$  ،  $b = 0$  .....

٣) حدد النقط الحرجة وفترات التزايد والتناقص للدالة د حيث  $d(s) = \frac{1}{2}(s^2 - 2s)$  .....

٤) إذا كان  $d(s) = s^3 - 6s^2 + 12s$  ، ابحث وجود نقط حرجة للدالة د وحدد فترات التحدب إلى أعلى وفترات التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت، ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى د

٥) ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث  $v = d(s)$  إذا كان:

د متصلة ومجالها  $[-1, 5]$  ،  $d(1) = d(3) = 0$  ،  $d'(2)$  غير موجودة،

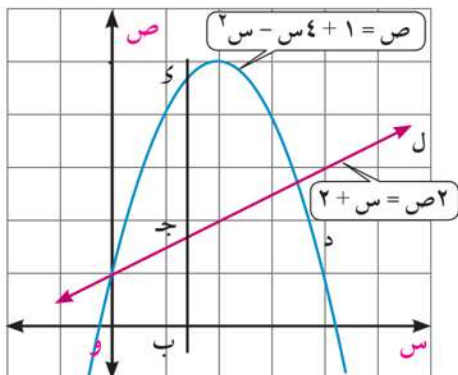
$d'(s) < 0$  عندما  $s > 2$  ،  $d'(s) > 0$  عندما  $s < 2$  ،  $d'(s) < 0$  عندما  $s \neq 2$

٦) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على  $E$  ،  $d(s) = \begin{cases} s^2 + as + b & \text{عندما } s \leq 1 \\ s^3 - s^2 & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$  .....

أ) أوجد قيم الثابتين  $a$  ،  $b$

ب) حدد فترات التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت.

٧) من مجموعة كل الأزواج المرتبة  $(s, v)$  للأعداد الصحيحة غير السالبة والتي مجموع مسقطيها  $5$  ، أوجد الزوج المرتب الذي يجعل حاصل ضرب مربع المسقط الأول ومكعب المسقط الثاني أكبر ما يمكن.



٨) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د، والمستقيم ل

إذا كان المستقيم  $L$  يوازي محور الصادات ويقطع

الجزء الموجب لمحور السينات، والمستقيم ل ومنحنى د في

النقط  $B$  ،  $C$  ،  $D$  على الترتيب فأوجد إحداثي النقطة  $B$  التي

تجعل  $BC$  أكبر ما يمكن. حيث  $C(2, 2)$



# The Definite Integral and its Applications

حجم سطح دورانی حول أحد محاور الإحداثيات.

## المصطلحات الأساسية

Areas in the plane	المساحات في المستوى	Rule	قاعدة	Antiderivative	مشتقة عكسية
Volumes of Revolution solids	حجوم الأجسام الدورانية	Trigonometric Function	دالة مثلثية	Indefinite Integral	تكامل غير المحدد
		Definite Integral	تكامل محدد	Differential	تفاضلي
			النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل	Integration by Substitution	تكامل بالتعويض
		Fundamental theorem of calculus		Integration by Parts	تكامل بالتجزئ

## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.
- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

## دروس الوحدة

- الدرس (١ - ٤): طرق التكامل.
- الدرس (٢ - ٤): تكامل الدوال المثلثية.
- الدرس (٣ - ٤): التكامل المحدد.
- الدرس (٤ - ٤): المساحات في المستوى.
- الدرس (٥ - ٤): حجوم الأجسام الدورانية.

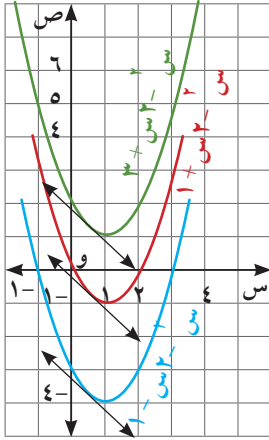
## مخطط تنظيمي للوحدة





## Methods of Inegration

## مقدمة



سبق وتعرفت على المشتقة العكسية أو التكامل غير المحدد، وهو عملية عكسية لعملية الاشتقاق، فيقال للدالة  $f$  أنها مشتقة عكسية للدالة  $f'$  في فترة  $I$  إذا كان:  $f'(x) = f(x)$  لكل  $x \in I$

عند إضافة أى ثابت للمشتقة العكسية  $f'$ ، (يعرف بالثابت الاختياري) تمثل المشتقة العكسية عندئذ بمجموعة المنحنيات  $y = f(x) + C$  التي تختلف عن بعضها في الثابت  $C$  ويميل المماس لأي منها متساوي لذلك فهي منحنيات متوازية كما في الشكل المقابل، وقد اصطلح على تسمية مجموعة المشتقات العكسية هذه بالتكامل غير المحدد ويرمز به بالرمز:  $\int f(x) dx$  و  $C$  و يكون:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

## للتكامل غير المحدد الخواص التالية:

إذا كانت  $f, g$  دالتين لهما مشتقتان عكسيتان في الفترة  $I$  فإن:

$$1- \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$2- \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي ثابت}$$

## لاحظ أن:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \quad \text{حيث } f(x) \neq 0, \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

## وعلى ذلك

$$\int (x^3 + x^2 + x + 5) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x + C$$

عملية إيجاد المشتقات العكسية تتطلب معرفة صور التكاملات القياسية لبعض الدوال، إلا أن التكاملات المطلوب إيجادها قد تظهر بعيدة عن التكاملات القياسية وهو أمر يتطلب التعرف على طرق أخرى للتكامل منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ اعتماداً على تفاضلي الدالة.

## سوف تتعلم

- إيجاد الدالة الأصلية لدالة معطاة.
- إيجاد تفاضلي دالة.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكامل بالتجزئ.

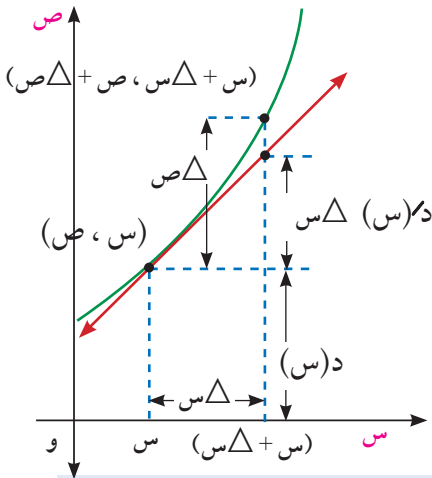
## المصطلحات الأساسية

- Antiderivative المشتقة العكسية
- التكامل غير المحدد
- Indefinite Integral
- Differential تفاضلي

## الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.





## التفاضلات

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق، حيث  $v = d(s)$   
من تعريف المشتقة:

$$\frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{س} = \frac{\Delta س}{س} \cdot \frac{د}{س} = \frac{د}{س} \cdot \frac{\Delta س}{س}$$

∴ عندما  $\Delta$  س  $\leftarrow$  **فإن:**  $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} \leftarrow \text{د/س}$

أى أن:  $\frac{\Delta v}{\Delta s} \simeq \frac{1}{\Delta s}$  عندما  $\Delta s \simeq 0$  ،  $\Delta s \neq 0$

$$\therefore \Delta \simeq \Delta(s) \quad (\text{بالضرب } \Delta \times)$$

لتكن دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى  $s$  ،  $\Delta$   $s$  يرمز للتغير في  $s$  حيث  $\Delta s \neq 0$  . فإن

- ۱- تفاضلی ص (ویرمز له بالرمز و ص) = د(س)  $\Delta$  س
- ۲- تفاضلی س (ویرمز بالرمز و س) =  $\Delta$  س

على ذلك فإن:

وهو دالة في متغيرين **س** ، **س** **س**

**فإن: س ص = س<sup>3</sup> س** **س**

إذا كانت **ص = س<sup>3</sup> س**

**س** **ص = د(س) س**

مثال 

## تفاضلی الدالة

۱) أوجد تفاضلي كل مما يأتي:

أ  $\frac{ص}{١-ص} = س$       ب  $ع = \pi \frac{٤}{٣} مو٣$

ج ص = ع. ل حيث كل من ع، ل دالة في س

**الحل** 

اُ : ∴ ص = ص' و س، ص =  $\frac{s}{1-s} + 1 = \frac{1}{1-s} + 1 = 1 + (1-s)^{-1}$

$$\therefore S_v = \frac{1}{r(1 - S_s)}$$

ب)  $\therefore \text{ج} = \frac{\text{ج} \times \frac{\pi}{3}}{\pi \times \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$

**لاحظ أن**

$$L = L \setminus \{s\}$$

$$س\text{'}ع = ع\text{'}س$$

ب)  $\because \mathcal{L} = \mathcal{L}'$

ج :: ی ص = (ع.ل) ی س

$$= (ع \cdot ل + ل \cdot ع) ي س$$

$$= \text{ع} \cdot \text{ل} / \text{س} + \text{ل} \cdot \text{ع} / \text{س}$$

$$ص = ع ل + ل ی ع$$

## ٩ حاول أن تحل

١ أوجد تفاضلي كل من:

أ  $\text{ص} = (2\text{س} + 5)^4$

ب  $\text{ص} = \text{ه}^2 - \text{س}^3$

ج  $\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ج}}$  حيث ع، ل دوال في المتغير س

تفكير ناقد: إذا كان  $\text{ص}^2 + \text{ص}^2 = 25$ أوجد:  $\text{و}$  ص بدلالة  $\text{س}$ ،  $\text{ص}$ ،  $\text{و}$  س

## التكاملات الأساسية (القياسية)

لا توجد طريقة عامة لإيجاد تكامل الدوال المختلفة تماثل طرق إيجاد مشتقات هذه الدوال، إذ ينحصر إيجاد تكامل أى دالة د فى البحث عن دالة تكون مشتقاتها هى الدالة د وهذا يتوقف على مدى استيعابك لمشتقات الدوال الأساسية السابق دراستها، والتي نلخصها فى الجدول التالى:

جدول مشتقات الدوال الأساسية والتكاملات القياسية المناظرة	
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{س}^{\text{ن}})' = \text{ن س}^{\text{ن}-1}$	$\int \text{س}^{\text{ن}} \text{و} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ $\text{ن} \neq -1$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{جاس})' = \text{جتاس}$	$\int \text{جتاس و} = \text{جاس} + \text{ث}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{جتاس})' = -\text{جاس}$	$\int -\text{جاس و} = \text{جتاس} + \text{ث}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{طاس})' = \text{قاس}$ ، $\text{س} \neq \frac{1}{\pi}$	$\int \text{قاس و} = \text{طاس}$ ، $\text{ن} \neq \frac{1}{\pi}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{هس})' = \text{هس}$	$\int \text{هس و} = \text{هس} + \text{ث}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{اس})' = \text{اس لو ه}$	$\int \text{اس لو ه و} = \text{اس} + \text{ث}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{لو هس})' = \frac{1}{\text{س}}$	$\int \frac{1}{\text{س}} \text{و} = \text{لو هس} + \text{ث}$

## التكامل بالتعويض

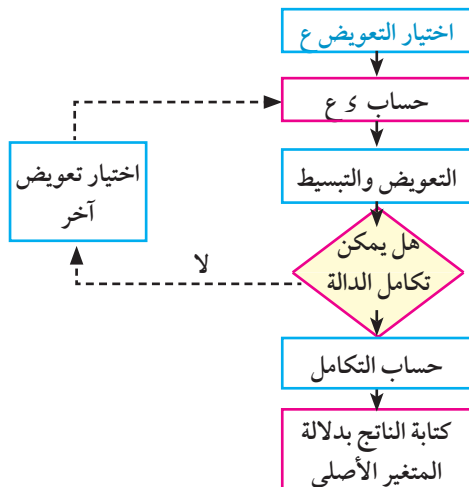
Integration by Substitution

من أهم طرق التكامل لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

على الصورة:  $\text{أد} = (\text{س})' \text{ر}(\text{س})$  و  $\text{س}$ فإذا كانت  $\text{ع} = \text{ر}(\text{س})$  دالة قابلة للاشتقاقفإن  $\text{و} = \text{ع} = \text{ر}(\text{س})$  و  $\text{س}$  ويكون:

$$\text{أد} = (\text{س})' \text{ر}(\text{س}) = \text{و} = \text{ع}$$

لإجراء عملية التكامل بالتعويض تتبع المخطط المقابل:





## مثال

### التكامل بالتعويض

٢ أوجد

أ  $\int \frac{1}{(2s^2 - 7)^3} ds$

الحل

أ بوضع  $u = 2s^2 - 7$

$\therefore u = 2s^2 - 7$

$\int \frac{1}{(2s^2 - 7)^3} ds = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{-3} du$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} u^{-2} + C$

$= -\frac{1}{4(2s^2 - 7)^2} + C$

ب بوضع  $u = 2s^2 - 7$

$\int \frac{1}{(2s^2 - 7)^3} ds = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{-3} du$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} u^{-2} + C$

$= -\frac{1}{4(2s^2 - 7)^2} + C$

## ٩ حاول أن تحل

٢ أوجد :

أ  $\int \frac{1}{(3s^2 + 4)^3} ds$

ب  $\int \frac{1}{(s^2 - 4)^3} ds$

## مثال

### التكامل بالتعويض

٣ أوجد

أ  $\int \frac{1}{(s^2 + 4)^3} ds$

الحل

$\therefore u = s^2 + 4$

أ بوضع  $u = s^2 + 4$

(تعويض)  $\int \frac{1}{(s^2 + 4)^3} ds = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{-3} du$

(تكامل)  $= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} u^{-2} + C$

(تبسيط)  $= -\frac{1}{4(s^2 + 4)^2} + C$

(تعويض عن ع)  $= -\frac{1}{4(s^2 + 4)^2} + C$

(تعویض)

$$e_1^2 e_2^2 \times [1 + e_1^2 + e_2^2] \lambda =$$

(تبیط)

$$\text{ث} + [{}^{\text{ر}}\text{ع} + {}^{\text{و}}\text{ع} \frac{\text{و}}{\text{و}} + {}^{\text{ح}}\text{ع} \frac{\text{و}}{\text{و}}] \text{و} =$$

(عامل مشترك)

(التعويض عن ٤)

$$\sqrt[3]{(1-s)(5s^2+4s+6)+3} = \sqrt[3]{\frac{2}{30}}$$

**حاول أن تحل**

٣ أوجد التكاملات الآتية:

(ب)  $\sqrt[3]{\frac{2s^2}{1+3s}}$  کی س

ا ۱ س (۲ س - ۳) ۴ س

التكامل بالتعويض

٤) أوجد :

ب) ۶ س ۷ س ۸ س

۱)  $\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{s+1}}{s}}$  و س

الحل 

١) بوضع  $\epsilon = \sqrt{s} + 1$   $\therefore \sqrt{s} = \epsilon - 1$  ،  $s = (\epsilon - 1)^2$

$$S = 2(1 - \epsilon)S + \epsilon$$

(بالتعويض)

$$\epsilon \times \sqrt{\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)}} \lambda = \sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon}} \lambda$$

(بالتكامل)

$$ث + \frac{2}{3} \times 2 = 5 \frac{1}{3} =$$

(بالتعويض عن ع)

$$\text{ث} + \sqrt[3]{(\sqrt{s} + 1)\sqrt{s}} \frac{4}{3} =$$

ب) بوضع ع = س<sup>۲</sup> ∴ ی ع = س<sup>۲</sup> ی س

$$16s^2 - 3 = 2(s^2 - 2s + 1) = 2(s - 1)^2$$

(التعويض والتكامل)

$$= 3 \text{ هـ } 4 \text{ و } 5 = 3 \text{ هـ } 4 + \text{ث}$$

(بالتعويض عن ع)

$$= 3\text{هـ} - 2\text{س} + \text{ث}$$

## ٤ حاول أن تحل

أوجد :

أ  $\int \frac{س}{\sqrt{س^3 - ١}} دس$

ب  $\int \frac{١}{(س - ٣) هـ س^٦ - س^٢} دس$

## مثال التكامل بالتعويض

أوجد

أ  $\int \frac{س^٥}{١ - س^٣} دس$

ب  $\int \frac{\sqrt{لوه س}}{س} دس$

الحل

أ بوضع  $ع = س^٣ - ١$   $دع = ٣س^٢$   $دس = \frac{١}{٣} دع$

(التعويض)

$$\int \frac{س^٥}{١ - س^٣} دس = \int \frac{س^٤}{١ - س^٣} دس = \int \frac{س^٤}{١ - س^٣} \cdot \frac{١}{٣} دع = \frac{١}{٣} \int \frac{س^٤}{١ - س^٣} دع$$

(التكامل والتعويض)

$$\frac{١}{٣} \int \frac{س^٤}{١ - س^٣} دع = \frac{١}{٣} \int \frac{س^٤}{١ - س^٣} د(س^٣ - ١) = \frac{١}{٣} \int \frac{س^٤}{١ - س^٣} د(س^٣ - ١)$$

ب بوضع  $ع = لوه س$   $دع = \frac{١}{س}$   $دس = د(لوه س) = \frac{١}{س} دس$

(بالتعويض)

$$\int \frac{\sqrt{لوه س}}{س} دس = \int \frac{\sqrt{لوه س}}{س} د(لوه س) = \int \frac{\sqrt{لوه س}}{س} د(لوه س)$$

$$= \int \frac{\sqrt{لوه س}}{س} د(لوه س) = \int \frac{\sqrt{لوه س}}{س} د(لوه س)$$

(بالتكامل والتعويض)

$$= \frac{٢}{٣} [لوه س] + ث$$

## ٥ حاول أن تحل

أوجد :

أ  $\int \frac{هـ س^٢}{س^٣ + ٣} دس$

ب  $\int \frac{١}{س(لوه س)^٢} دس$

**تفكير ناقد:** باستخدام التكامل بالتعويض أثبت صحة قواعد التكامل التالية:

حيث  $ن \neq ١ -$

١-  $\int [د(س)]^ن د(س) = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$

حيث  $د(س) \neq ٠$

٢-  $\int \frac{د(س)}{د(س)} د(س) = \frac{د(س)}{د(س)} + ث$

## التكامل بالتجزئ Integration by Parts

إذا كانت ص ، ع دالتين في المتغير س وقابلتين للإشتقاق، فإن:

$$\frac{د}{دس} (ص ع) = ص \frac{دع}{دس} + ع \frac{دص}{دس}$$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

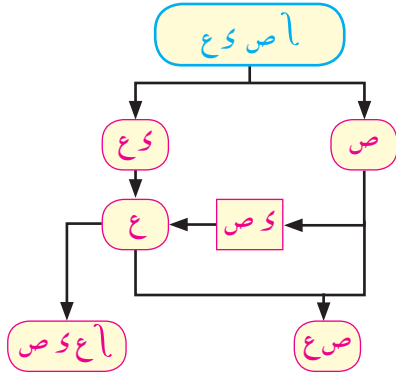
$$\int \frac{د}{دس} (ص ع) دس = ص \int \frac{دع}{دس} دس + ع \int \frac{دص}{دس} دس$$

تذكر أن

٩

$$دع = \frac{دع}{دس} دس$$

$$دص = \frac{دص}{دس} دس$$



$$\text{ص ع} = \text{ل ص ع} + \text{ل ع ص}$$

$$\text{أى أن: ل ص ع} = \text{ص ع} - \text{ل ع ص}$$

تسمى المعادلة السابقة بقاعدة التكامل بالتجزئ ، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى، ذلك باختيار مناسب لكل من ص ، ع بحيث يمكن حساب التكامل بالطرف الأيسر بطريقة أسهل من حساب التكامل بالطرف الأيمن، وتتبع المخطط المقابل كما يتضح من الأمثلة التالية:

### مثال

#### التكامل بالتجزئ

٦ أوجد:

أ.  $\int \text{ل ص ه س ي س} \, \text{د}$

الحل

أ. لإيجاد ل ص ه س ي س:

نفرض أن:  $\text{ص} = \text{س}$  ،  
 $\therefore \text{ل ع ص} = \text{ل ع س}$

ب.  $\int \text{ل س ه س ي س} \, \text{د}$

ع = ه س ي س  
 $\text{ل ع} = \text{ل ه س ي س} = \text{ه س}$

$$\therefore \text{ل ص ي ع} = \text{ص ع} - \text{ل ع ي ص}$$

$$\therefore \int \text{ل س ه س ي س} \, \text{د} = \int \text{ل ه س ي س} \, \text{د} - \int \text{ل ع ي ص} \, \text{د} = \int \text{ه س} \, \text{د} + \text{ث} = \int \text{ه س} \, \text{د} + (1 - \text{س}) + \text{ث}$$

ملاحظة هامة: إضافة ثابت إلى الدالة لا يغير من النتيجة (أثبت ذلك)

ب. لإيجاد ل س ه س ي س:

نفرض أن:  $\text{ص} = \text{س}^2$  ،  
 $\text{ل ص} = \text{ل س}^2 = \text{ص}$   
 $\text{ل س ه س ي س} = \text{ل ه س ي س} - \text{ل ع ي ص} = \text{ل ه س ي س} - \text{ل ع س} = \text{ل ه س ي س} - \text{ل ع س} = \text{ل ه س ي س} - \text{ل ع س}$

$$\int \text{ل س ه س ي س} \, \text{د} = \int \text{ل ه س ي س} \, \text{د} + \text{ث} = \int \text{ه س} \, \text{د} + (1 - \text{س}) + \text{ث}$$

$$\begin{aligned} &= \int \text{ل ه س ي س} \, \text{د} + \text{ث} \\ &= \int \text{ه س} \, \text{د} + [2 - \text{س}^2] + \text{ث} \end{aligned}$$

٦ حاول أن تحل

٦ أوجد:

ب.  $\int \text{ل س ه س ي س}^3 \, \text{د}$

أ.  $\int \text{ل س ه س}^2 \, \text{د}$

لاحظ أن:

إختيار ص ، ع يتوقف على:

١- ص أبسط من ص

٢- ع أسهل في التكامل

مثال

تكامل بالتجزئ

٧ أوجد

أ ل لوس و س

الحل

أ بفرض أن:

ب ل لوس و س

ص = لوس

ع = لوس

ص = لوس - لوس × لوس

ص = لوس - لوس + ث = لوس (١ - لوس) + ث

ص = لوس

ع = لوس

ص = لوس - لوس × لوس

ص = لوس - لوس + ث = لوس (١ - لوس) + ث

٩ حاول أن تحل

٧ أوجد:

أ ل لوس (١ + س) و س

ب ل لوس (لوس ÷ لوس) و س

مثال

تكامل بالتجزئ

٨ أوجد:

أ ل لوس (١ + س) و س

الحل

أ لاحظ أن (١ + س) أسهل في التكامل

بوضع ص = س هـ س

ع = لوس (١ + س) و س

ص = لوس (١ + س) هـ س

ص = لوس (١ + س) هـ س - لوس (١ + س) هـ س



$$- = \frac{s \text{ هـ}}{1+s} + \frac{s \text{ و}}{1+s}$$

$$= \frac{s \text{ هـ} + s \text{ و} + (1+s)}{1+s} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s} + \frac{s \text{ و}}{1+s} + 1 = \frac{s \text{ هـ}}{1+s} + \frac{s \text{ و}}{1+s} + 1$$

$$و = ع - (1+s)^{-\frac{1}{2}}$$

$$ع = \frac{3}{2 \times 2} (1+s)^{\frac{3}{2}}$$

ب) بوضع ص = ٤

و = ٤ و ص

$$= \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}} + \frac{s \text{ و}}{1+s^{\frac{3}{2}}}$$

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد :

$$ب) \frac{s \text{ و}}{3+s^{\frac{3}{2}}}$$

$$أ) \frac{s \text{ هـ} + s^{\frac{3}{2}}}{1+s^{\frac{3}{2}}}$$

**تفكير ناقد:** هل يمكنك إيجاد  $\frac{s \text{ هـ}}{1+s^{\frac{3}{2}}}$  و س بطريقة التكامل بالتعويض؟ فسر إجابتك.

### بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

إذا علمنا أن الدالة  $s$  تعطى ميل المماس (أو دالة هامش الربح أو معدل تغير دالة) عند أي نقطة على منحنى الدالة  $D$  فإنه يمكن أن نعرف الدالة  $s$  من عملية التكامل غير المحدد للدالة  $s$  حيث:  $D(s) = \frac{s \text{ و}}{1+s}$  يلاحظ أن هذا التكامل لا يعطى دالة وحيدة إذ يحتوي على ثابت اختياري يمكن تحديده من البيانات المعطاة.

مثال

#### معادلة منحنى دالة

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة  $D$  عند أي نقطة  $(s, \text{و})$  واقعة عليه يعطى بالعلاقة  $s \text{ و} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s}$  فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة  $(1, 2)$ .

الحل

بفرض أن معادلة منحنى الدالة هي  $s = D(s)$

∴  $D(s) = \frac{s \text{ و}}{1+s}$

$$\therefore D(s) = \frac{s \text{ و}}{1+s} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s} + \frac{s \text{ و}}{1+s}$$

$$\therefore \frac{s \text{ و}}{1+s} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s} + \frac{s \text{ و}}{1+s}$$

∴ منحنى  $D$  يمر بالنقطة  $(1, 2)$  فهي تحقق معادلة

$$\therefore \frac{2}{1+1} = \frac{s \text{ هـ}}{1+s} + \frac{2}{1+s}$$

## ٩ حاول أن تحل

٩ أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠، ١) والذي ميل المماس له عند أى نقطة (س، ص) واقعة عليه يساوى

$$س \sqrt{س^2 + ١}$$

## تمارين ٤ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ لـ (س) (س+٣)° و س يساوى

أ  $\frac{1}{٦} (س+٣)^٦ + ث$  ب  $\frac{1}{١٢} (س+٣)^٦ + ث$  ج  $\frac{1}{٤} (س+٣)^٤ + ث$  د  $\frac{1}{٨} (س+٣)^٤ + ث$

٢ إذا كان لـ (س+٣) لو س و س = ص ع - ل ع و ص فإن ص ع يساوى

أ  $س^٢ لو س$  ب  $(س+٣) لو س$  ج  $\frac{1}{٢} (س+٣) لو س$  د  $س (س+٣) لو س$

٣ إذا كان لـ (س-١) هـ س+٣ و س = ص ع - ل ع و ص فإن ل ع و ص

أ  $هـ س+٣ + ث$  ب  $\frac{1}{٢} هـ س+٣ + ث$  ج  $هـ س+٣ + ث$  د  $\frac{1}{٢} هـ س+٣ + ث$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:

٤ لـ (س) (س-٢)° و س ٥ لـ (س) (س-٢)° و س ٦ لـ (س) (س-٢)° و س

٧ لـ  $\sqrt{س+٤}$  و س ٨ لـ  $\sqrt{س+١}$  (س-٢) و س ٩ لـ (س) (س+٣)° و س

١٠ لـ  $\frac{س}{س^٣+٢}$  و س ١١ لـ  $\frac{س}{س+١}$  و س ١٢ لـ  $\frac{س+١}{١-س}$  و س

١٣ لـ  $\frac{س^٢}{١-س^٢}$  و س ١٤ لـ  $س هـ س^٢$  و س ١٥ لـ  $\frac{١-س}{س+س}$  و س

١٦ لـ  $\frac{س}{لو س}$  و س ١٧ لـ  $\frac{س}{(لو س)^٣}$  و س ١٨ لـ  $\frac{١}{س لو س}$  و س

باستخدام التجزئ المناسب أوجد التكاملات الآتية:

١٩ لـ  $س هـ س^٢$  و س ٢٠ لـ  $س هـ س^٢$  و س ٢١ لـ  $\frac{س}{س هـ س}$  و س

٢٢ لـ  $س لو س$  و س ٢٣ لـ  $لو س و س$  ٢٤ لـ  $(لو س)^٢ و س$

٢٥ لـ  $\frac{س}{لو س}$  و س ٢٦ لـ  $(س+١)^٢ هـ س و س$  ٢٧ لـ  $س (لو س)^٢ و س$

أجب عن ما يأتى:

٢٨ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة أ (٢، ٣)، وميل العمودى عليه عند أى نقطة (س، ص) هو ٣- س.

٢٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (س، ص) واقعة عليه هو  $\sqrt{س+١}$  أوجد معادلة المنحنى علمًا بأن

المنحنى يمر بالنقطة (٠،  $\frac{١١}{١٥}$ )

٣٠ أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان  $\frac{س}{س} = أ + ب$  حيث أ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند

النقطة (٠، ٢) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى.

# تكامل الدوال المثلثية

## Integral of Trigonometric Functions

### فكر و ناقش



ينحصر إيجاد تكامل أى دالة فى البحث عن دالة أخرى ت إذا استخرجت مشتقتها الأولى لتتج دالة د ، أى : د (س) =  $\frac{f'(s)}{f(s)}$  ت (س) وعلى ذلك فإن:

أد (س) = س = ت (س) + ث حيث ث ثابت اختياري.

بين أى العلاقات التالية صحيحة:

- أ.  $\int \sin s \, ds = -\cos s + C$       ب.  $\int \cos s \, ds = \sin s + C$
- ج.  $\int \sin^2 s \, ds = \frac{s}{2} - \frac{\cos 2s}{4} + C$       د.  $\int \cos^2 s \, ds = \frac{s}{2} + \frac{\sin 2s}{4} + C$

**لاحظ أن:** مقدار استيعابك للمشتقات الأولى للدوال المثلثية يساعدك فى إيجاد تكاملات هذه الدوال

من دراستك السابقة لمشتقات الدوال المثلثية (كما فى تذكر) ، والجدول التالى لقواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية ، قارن بين مشتقات الدوال المثلثية واستنتج تكاملاتها ثم أكمل الجدول.

### تذكر أن



$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جاس) = جتاس	$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس
$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس	$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس
$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس	$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس
$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس	$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس
$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس	$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس
$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس	$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس
$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس	$\frac{f'(s)}{f(s)}$ (جتاس) = -جاس

### التكامل غير المحدد

$\int \sin s \, ds = -\cos s + C$
$\int \cos s \, ds = \sin s + C$
$\int \sin^2 s \, ds = \frac{s}{2} - \frac{\cos 2s}{4} + C$
$\int \cos^2 s \, ds = \frac{s}{2} + \frac{\sin 2s}{4} + C$
$\int \sin s \cos s \, ds = -\frac{\sin^2 s}{2} + C$
$\int \cos s \sin s \, ds = \frac{\cos^2 s}{2} + C$

تحقق من صحة استنتاجك باستخدام تعريف المشتقة العكسية.

### سوف تتعلم

قواعد تكامل الدوال المثلثية

### المصطلحات الأساسية

- قاعدة Rule
- دوال مثلثية Trigonometric Function
- جدول التكاملات Table of Integrals

### الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية

## مثال

## جدول التكامل

١ أوجد التكاملات التالية:

أ  $\int (جاس + جتاس) دس$

ج  $\int \frac{١}{١ - جتا^٢ س} دس$

الحل

أ  $\int (جاس + جتاس) دس = \int جاس دس + \int جتاس دس$

$$= \frac{١}{٢} جتا س + ث$$

ب  $\int (قاس - ظاس) دس = \int قاس دس - \int ظاس دس$

$$= \frac{١}{٢} قتا س + ث$$

ج  $\int \frac{١}{١ - جتا^٢ س} دس = \int \frac{١}{جاس} دس = \int \frac{١}{جتاس} دس = -\frac{١}{جتاس} + ث$

د  $\int \frac{جتاس}{١ - جتا^٢ س} دس = \int \frac{جتاس}{جاس} دس = \int \frac{جتاس}{جاس} \times \frac{١}{جتاس} دس = \int \frac{١}{جاس} دس = \frac{١}{٢} قتا س + ث$

## ٢ حاول أن تحل

١ أوجد:

ب  $\int (جتاس + ظاس) دس$

أ  $\int (جاس + قاس) دس$

د  $\int \frac{جتاس}{١ - جاس} دس$

ج  $\int (جتاس - قتا س) دس$

## ملاحظة هامة:

$$\text{نعلم أن: } \int \frac{س^{١+ن}}{١+ن} دس = \frac{س^{١+ن}}{١+ن} + ث \quad (١) \quad \int (جاس + جتاس) دس = \frac{١}{٢} جتا س + ث \quad (٢)$$

ولتعميم النتائج السابقة أو جميع الصور القياسية للتكامل نلاحظ أنه بإضافة ثابت إلى المتغير المستقل س لا يؤثر على صيغة التكامل ، كما أن ضرب س في المعامل فإن التكامل يحتفظ بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل.

لذلك نجد أن الصورة السابقة لكل من ١ ، ٢ هي:

$$\int (اس + ب) دس = \frac{(اس + ب)^{١+ن}}{(١+ن)} + ث$$

$$\int (اس + ب) دس = -\frac{١}{ب} جتا (اس + ب) + ث$$

## مثال

## الصور القياسية للتكامل

أوجد :

- أ.  $\int_0^1 (2s-5) ds$  ب.  $\int_0^1 (5-3s) ds$   
 ج.  $\int_0^1 (s^3 + \frac{3}{s}) ds$  د.  $\int_0^1 (s^2 + 2s) ds$

## الحل

- أ.  $\int_0^1 (2s-5) ds = \frac{1}{2} (2s^2 - 5s) \Big|_0^1 = -\frac{9}{2}$   
 ب.  $\int_0^1 (5-3s) ds = \frac{1}{2} (5s - 3s^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$   
 ج.  $\int_0^1 (s^3 + \frac{3}{s}) ds = \frac{1}{4} s^4 + 3 \ln s \Big|_0^1 = 3 \ln 1 - \lim_{s \rightarrow 0^+} 3 \ln s = -\infty$   
 د.  $\int_0^1 (s^2 + 2s) ds = \frac{1}{3} s^3 + s^2 \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$

## ٤ حاول أن تحل

أوجد :

- أ.  $\int_0^1 (3s^2 - 2s) ds$  ب.  $\int_0^1 (2s^2 + 3s) ds$   
 ج.  $\int_0^1 (1 + 2s^2) ds$  د.  $\int_0^1 (3s^2 - 1) ds$

## مثال

## تطبيقات

٣ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س، ص) معطى بالعلاقة:

$$\frac{ds}{dV} = \frac{V}{s} \quad \text{جاس جتا س، أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة } (1, \frac{\pi}{4})$$

## الحل

∴ ميل مماس المنحنى عند أى نقطة:  $\frac{ds}{dV} = \frac{V}{s}$  جاس جتا س∴ معادلة المنحنى:  $V = \frac{s^2}{2} + C$  جاس جتا س

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + C \quad \text{جاس جتا س}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = C \quad \text{جاس جتا س}$$

∴ المنحنى يمر بالنقطة  $(1, \frac{\pi}{4})$ 

∴ فهي تحقق معادلة

$$1 = \frac{1}{4} + C \quad \text{جاس جتا س}$$

∴ معادلة المنحنى هي:  $V = \frac{s^2}{4} + 1$ 

## تذكر أن

$$\begin{aligned} \text{جاس جتا س} &= 2 \text{ جاس جتا س} \\ \text{جتا س} &= \text{جتا س} - \text{جاس جتا س} \\ 1 &= 2 - 1 \\ 2 &= \text{جتا س} - 1 \end{aligned}$$



## ٩ حاول أن تحل

٣ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١، ٢) وميله المماس له عند أى نقطة عليه (س، ص) هو:  
 $\frac{ص}{س} = \frac{\pi^3 \text{ جتا } \pi - \pi^2 \text{ جتا } \pi}{\pi}$

## تمارين ٤-٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- ١ إذا كانت  $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$  قتا<sup>٢</sup> س، ص = ٢ عند س =  $\frac{\pi}{٤}$  فإن ص تساوى
- أ ٢ - ظنا س      ب ٢ - ظنا س      ج ٣ - ظنا س      د ٣ - ظنا س
- ٢ ل جتا<sup>٢</sup> س و س يساوى
- أ س +  $\frac{١}{٢}$  جا<sup>٢</sup> س + ث      ب س + ٢ جا<sup>٢</sup> س + ث
- ج س -  $\frac{١}{٢}$  جا<sup>٢</sup> س + ث      د س - جا<sup>٢</sup> س + ث
- ٣ ل قا<sup>٢</sup> س ظا س و س تساوى
- أ  $\frac{١}{٥}$  قا<sup>٢</sup> س + ث      ب  $\frac{١}{٤}$  قا<sup>٢</sup> س + ث
- ج  $\frac{١}{٢}$  ظا<sup>٣</sup> س + ث      د  $\frac{١}{٣}$  ظا<sup>٣</sup> س + ث
- ٤ ل (٣س + ٢) جا س و س تساوى
- أ (٣س + ٢) جتا س + ٣ جا س + ث      ب (٣س + ٢) جتا س + ٣ جا س + ث
- ج (٣س + ١) جتا س + ٢ جا س + ث      د (٣س + ١) جتا س - ٢ جا س + ث

أوجد التكمالات الآتية:

- ٥ ل  $\sqrt{٣}$  جتا س و س      ٦ ل قتا<sup>٢</sup> (٣س + ٢) و س      ٧ ل ظا س جتا س و س
- ٨ ل جا س جتا س و س      ٩ ل (١ + ظا<sup>٢</sup> س) جتا<sup>٢</sup> س و س      ١٠ ل (جا س - جتا س) و س
- ١١ ل جتا<sup>٣</sup> س جا س و س      ١٢ ل جا<sup>٢</sup> س جتا س و س      ١٣ ل س<sup>٢</sup> جتا (س + ٣) و س
- ١٤ ل (٣ + جا س) جتا س و س      ١٥ ل قا<sup>٢</sup> س ظا س و س      ١٦ ل جتا<sup>٢</sup> س -  $\frac{٤}{س}$  و س
- ١٧ ل (جتا<sup>٢</sup> س + جتا س) و س      ١٨ ل (جتا س + قا س) و س      ١٩ ل (ظا<sup>٢</sup> س + ٢ جا<sup>٢</sup> س) و س

س

أجب عن ما يأتى

- ٢٠ إذا كان  $\frac{ص}{س} = ٧ - جا٢ س$  اوجد ص بدلالة س إذا كان ص = ٥ عند س = ٠
- ٢١ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة  $(\frac{\pi}{٢}, ٩ + \frac{\pi^2}{٤})$  إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة (س، ص) عليه يعطى بالعلاقة التالية:  $م = ٢س + \frac{١}{٢} قا<sup>٢</sup> س$
- ٢٢ منحنى ميل المماس عند أى نقطة يساوى - ا قتا<sup>٢</sup> س حيث أثبت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين  $(\frac{\pi}{٤}, ٥)$ ،  $(١, \frac{\pi^3}{٤})$  أوجد معادلة المنحنى.

# التكامل المحدد



## The Definite Integral

### فكر و ناقش



إذا كانت  $v = d(s)$ ، وميل المماس عند أي نقطة  $(s, v)$  على منحنى الدالة  $d$  هو:

$$\frac{v}{s} = d'(s) = 2s + 3$$

هل يمكنك تعيين قيمة محددة لكل من  $d(3)$ ،  $d(5)$ ،  $d(5) - d(3)$ ؟ فسر إجابتك.

### لاحظ أن

١ من تعريف التكامل غير المحدد:

$$v = \int_a^b d'(s) ds = d(s) + C$$

حيث  $C$  مقدار ثابت إختياري لا يتوقف على  $s$  ومن الضروري الاحتفاظ به في التكامل حتى يكون شاملاً لجميع الدوال التي معدل تغيرها هو  $d'(s)$  وعلى ذلك فإن التكامل غير المحدد لا ينتج قيمة محددة تناظر قيمة معينة للمتغير  $s$ .

٢ إذا كانت قيمة التكامل عند  $s = a$  هي  $d(a) + C$

وقيمته عند  $s = b$  هي  $d(b) + C$

∴ الفرق بين قيمتي التكامل عند  $s = a$ ،  $s = b$

يساوي  $d(b) - d(a)$  وهو قيمة معينة (مهما كانت قيمة المقدار الثابت  $C$ )

ويرمز له بالرمز  $\int_a^b d'(s) ds$  حيث:

$$\int_a^b d'(s) ds = d(b) - d(a)$$

وتعرف هذه الصورة بالتكامل المحدد.

### سوف تتعلم

- مفهوم التكامل المحدد.
- استخدام النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لإيجاد التكامل المحدد.
- بعض خواص التكامل المحدد.

### المصطلحات الأساسية

- تكامل محدد Definite Integral

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية



## Fundamental Theorem of Calculus

## النظرية الأساسية في التفاضل

إذا كانت الدالة  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b]$ ، وكانت  $F$  أي مشتقة عكسية للدالة  $f$  على نفس الفترة، فإن:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

## ملاحظات:

١ يسمى  $F(b) - F(a)$   $\int_a^b f(x) dx$  بالتكامل المحدد، ويقرأ تكامل  $f(x)$  بالنسبة إلى  $x$  من  $a$  إلى  $b$ ، وهو عدد حقيقي تتوقف قيمته على:

أ الحدان السفلي والعلوي للتكامل المحدد أي على العددين  $a, b$  على الترتيب.

ب قاعدة الدالة  $f$

أما رمز المتغير  $x$  فيمكن استبداله بأي رمز آخر دون أن يؤثر ذلك على مقدار التكامل، أي أن:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

## ولذلك نكتب أحياناً

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

٢ يعبر عن  $F(b) - F(a)$  بالصورة  $F(b) - F(a)$  أو  $F(b) - F(a)$

٣ يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل (لماذا؟) ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل.

٤ تطبق جميع قواعد التكامل غير المحدد وجدول التكاملات القياسية عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة، فإذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b]$

## فإن:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{حيث } c \in [a, b]$$

## حساب قيمة تكامل محدد

## مثال

١ أوجد التكامل المحدد للدالة  $f(x) = x^2 - 2$  من  $x = -2$  إلى  $x = 4$  حيث  $f(x) = x^3 - 2x$

## الحل

الدالة د كثيرة الحدود متصلة على  $\mathbb{R}$ 

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) dx &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x \right]_{-2}^2 \\ &= \left[ \left( \frac{16}{4} - \frac{16}{3} + 6 - 8 \right) - \left( \frac{16}{4} - \frac{16}{3} + 6 - 8 \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

## ٩ حاول أن تحل

١ أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ  $\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2) dx$     ب  $\int_{-2}^2 \frac{3}{x+4} dx$     ج  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \theta d\theta$

نظرية إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

## تفكير ناقد

ما الفرق بين التكامل المحدد والمتكامل غير المحدد؟ فسر إجابتك.

## Properties of Definite Integral

## خواص التكامل المحدد

إذا كانت د دالة متصلة على [أ، ب]، ج  $\exists$  أ، ب [، فإن:

$$\begin{aligned} ١- \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ ٢- \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ ٣- \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx \end{aligned}$$

## حساب قيمة تكامل محدد

## مثال

٢ إذا كانت د دالة متصلة على  $\mathbb{R}$ ،  $\int_1^3 f(x) dx = 6$ ،  $\int_3^5 f(x) dx = 14$  أوجد  $\int_1^5 f(x) dx$ 

## الحل

 $\therefore$  د متصلة على  $\mathbb{R}$ ،  $\mathbb{R}$  تجزىء الفترة [١، ٥]

خاصية (٣)

$$\therefore \int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx$$

خاصية (١)

$$= \int_1^3 f(x) dx - \int_5^3 f(x) dx$$

$$= 6 - (-14) = 20$$

## ٩ حاول أن تحل

٢ إذا كانت د دالة متصلة على  $\mathbb{R}$ ،  $\int_1^2 f(x) dx = 255$ ،  $\int_2^5 f(x) dx = 15$  فأوجد  $\int_1^5 f(x) dx$

### حساب قيمة تكامل محدد

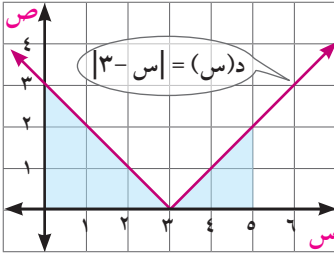
مثال

٣ أوجد  $\int_0^3 |3-s| ds$

الحل

د متصلة عند  $s=3$  ،

من تعريف دالة المقياس نجد أن  $|3-s| = \begin{cases} 3-s & \text{عندما } s < 3 \\ s-3 & \text{عندما } s \geq 3 \end{cases}$



لاحظ أن المساحة الملونة  
تساوي  $\frac{13}{4}$  وحدة مربعة

$$\begin{aligned} \int_0^3 |3-s| ds &= \int_0^3 (3-s) ds = \left[ 3s - \frac{s^2}{2} \right]_0^3 = \left( 9 - \frac{9}{2} \right) - \left( 0 - 0 \right) = \frac{9}{2} \\ &= \frac{13}{4} = \left( 9 + \frac{9}{4} - 10 - \frac{25}{4} \right) + \left( \frac{9}{4} - 9 \right) = \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد:

أ  $\int_0^1 |s+1| ds$  ب  $\int_0^4 |s-2| ds$

### حساب قيمة تكامل محدد بالتعويض

مثال

٤ أوجد قيمة  $\int_0^1 \sqrt{3+s^2} ds$

الحل

يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد أولاً، ثم التعويض عن المتغير  $s$  بحدى التكامل:

أولاً:

لإيجاد  $\int \sqrt{3+s^2} ds$  نضع  $u = 3+s^2$   $\therefore u' = 2s$   $\therefore ds = \frac{1}{2} du$

$\therefore \int \sqrt{3+s^2} ds = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} (3+s^2)^{3/2}$  (تعويض)

$= \frac{1}{3} (3+s^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (3+1)^{3/2} - \frac{1}{3} (3+0)^{3/2} = \frac{1}{3} (4^{3/2} - 3^{3/2})$  (تكامل)

$= \frac{1}{3} (8 - 3\sqrt{3})$  (تعويض عن  $u$ )

ثانياً:

$\int_0^1 \sqrt{3+s^2} ds = \left[ \frac{1}{3} (3+s^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (4^{3/2} - 3^{3/2})$

$= \frac{1}{3} (8 - 3\sqrt{3})$



## ٩ حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ.  $\int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx$  ب.  $\int_{-1}^2 \sqrt{3+x} \, dx$

## لاحظ أن

١- يمكن حل مثال ٤ مباشرة بإيجاد قيم  $\int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx$  المناظرة لقيم حدى التكامل ( $x=0$ ،  $x=3$ ) عند  $x=0$ ،  $\int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx = \int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx$  عند  $x=3$ ،  $\int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx = \int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx$

$$\therefore \int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx = \int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx = \int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx$$

$$\int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx = \left[ \frac{2}{3} (3-x)^{3/2} \right]_{-2}^3 = \frac{2}{3} (3-3)^{3/2} - \frac{2}{3} (3-(-2))^{3/2} = -\frac{2}{3} (5)^{3/2}$$

٢- فى بند **حاول أن تحل** ٤ ب: د(س) =  $\int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx$  دالة فردية وفى بند **حاول أن تحل** ٣ ب: د(س) =  $\int_{-2}^3 \sqrt{3-x} \, dx$  دالة زوجية

للدوال الفردية والدوال الزوجية فى التكامل المحدد الخواص التالية:

١- إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة  $[-a, a]$  فإن:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

٢- إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة  $[-a, a]$  فإن:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

باستخدام الخواص السابقة تحقق من صحة إجابتك فى حاول أن تحل ٣، ٤

## التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية

مثال

٥ أوجد:

أ.  $\int_{-1}^1 \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \, dx$  ب.  $\int_{-1}^1 (x^3 - x) \, dx$

الحل

أ. دالة متصلة على  $\mathbb{R}$ 

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \, dx = \int_{-1}^1 \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \, dx = \int_{-1}^1 \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \, dx$$

$$\therefore \text{دالة فردية ويكون: } \int_{-1}^1 \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \, dx = 0$$

ب) دالة كثيرة الحدود متصلة على  $\mathbb{C}$

$$\therefore d(-s) = (-s) = 1 - s^2 = 1 - s^2 = d(s)$$

∴ دالة زوجية ويكون:  $\lambda_2 = \lambda_1 (s-1)$  و  $\lambda_3 = \lambda_1 (s-1)$

$$۱۲ = ۶ \times ۲ = ۳ \cdot [۲ \frac{۱}{۳} - ۳س]$$

**حاول أن تحل**

٥ أوجد

١)  $\frac{3}{3-} \sqrt[3]{\frac{س}{س+1}}$

## تفكير ناقد

١ إذا كانت د دالة فردية متصلة على الفترة  $[-3, 5]$ ،  $\mathcal{L}_3^0$  د (س) و  $\mathcal{L}_3^0$  د (س) = ٩ ما قيمة  $\mathcal{L}_3^0$  د (س) و س؟

٢ إذا كانت دالة زوجية متصلة على الفترة  $[-4, 4]$ ،  $\mathcal{L}_{\epsilon}^4$  د(س)  $y$  س = ٢٠  
 $\mathcal{L}_{\epsilon}^2$  د(س)  $y$  س = ٦، ما قيمة  $\mathcal{L}_{\epsilon}^2$  د(س)  $y$  س ؟

## تمارين ٣-٤

## اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ إذا كان  $\ell_2$  د (س) ی س = ۱۲،  $\ell_2$  د (س) ی س = ۱۶ فإن  $\ell_3$  د (س) ی س یساوی:

۲۸- (د)                      ۴- (ج)                      ۴- (ب)                      ۲۸- (ا)

❷ إذا كانت د(س) = |س|، فإن  $\mathcal{I}_\mu^2$  د(س) يساوي:

١- أ ب صفر ج ٢ د ٤

**أوجد قيمة كل مما يأتي:**

۳. س، س، س

٤، ٦، ٣ (٣س ٢- ٢) ٥س

۵.  $\int_0^2 (1+s^2)^{\frac{3}{2}} ds$

$$\frac{\sum \frac{X_i^2}{n_i}}{\sum \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n}} \sim \chi^2_{k-1}$$

۷.  ${}^2_1\text{H}$  (س) (س<sup>۲</sup>-۳)  ${}^2_1\text{H}$  س

۸.  $\sqrt[3]{s^2 + 1}$  و  $s$

۹۔ ل<sup>۳</sup>|س-|۱|س

۱۰.  $g_{\epsilon} s (s + \epsilon) s^3$

۱۱)  $\sqrt[3]{s} \sqrt{s+1}$  و  $s$

۱۲. ۶' ۲ جا  $\pi$  ع ۷ ع

۱۳.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x \, dx$

۱۴. ﴿۲۷-۷۷﴾ ی س

## أجب عن ما يأتي:

- ١٥ إذا كان  $\int_0^1 f(x) dx = 10$ ،  $\int_0^2 f(x) dx = 2$  احسب قيمة
- أ  $\int_0^1 [f(x) + (x-1)] dx$  ب  $\int_0^1 [f(x) - (x-1)] dx$  ج  $\int_0^1 3f(x) dx$  د  $\int_0^1 f(x) dx$
- ١٦ إذا كان دالة متصلة على الفترة  $[-4, 4]$ ،  $\int_0^4 f(x) dx = 3$ ، احسب قيمة
- أ  $\int_0^2 [f(x) + 2] dx$  ب  $\int_0^4 f(x) dx$  ج  $\int_0^4 f(x) dx$  د زوجية
- ١٧ إذا كانت  $\int_0^2 f(x) dx = 2$  عندما  $2 > x$  أوجد  $\int_0^2 f(x) dx$  عندما  $2 \leq x$

## Areas in the Plane

## سوف تتعلم

- التعرف على المساحة كتكامل محدد.
- إيجاد المساحة المحددة بمنحنى دالة ومحور السينات على فترة مغلقة.
- إيجاد المساحة المحددة بين منحنين متقاطعين.

## المصطلحات الأساسية

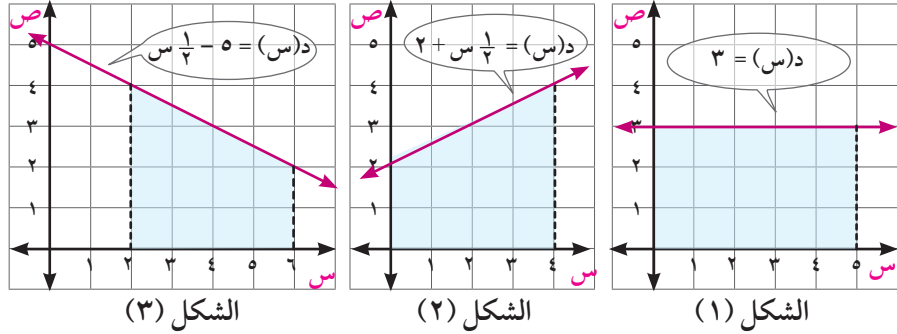
- Area مساحة
- Unit Squared وحدة مربعة

## الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلي

## فكر و ناقش

١- احسب المساحة الملونة في كل من الأشكال التالية هندسيًا.



٢- لكل من الأشكال السابقة احسب  $\int_a^b D(s) ds$  و  $s$  حيث  $D(s)$  معادلة المنحنى، والمستقيمان  $s = a$ ،  $s = b$  يحددان المنطقة الملونة.

٣- قارن بين مساحة كل شكل وناتج التكامل المحدد له، ماذا تستنتج؟

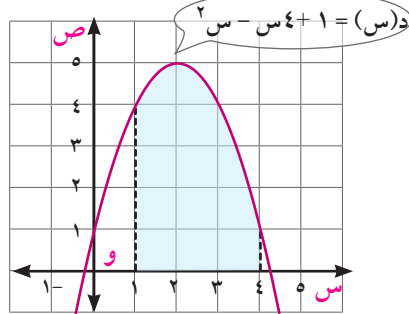
أولاً: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة  $D$  ومحور السينات في الفترة  $[a, b]$

**نظرية** إذا كانت دالة متصلة على الفترة  $[a, b]$ ،  $D(s) \geq 0$  في هذه الفترة، م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $D$  ومحور السينات والمستقيمين  $s = a$ ،  $s = b$  فإن:

$$M = \int_a^b D(s) ds$$

## المساحة تحت المنحنى مثال

- ١- يبين الشكل المقابل منحنى الدالة  $D$  حيث  $D(s) = 1 + 4s - s^2$  أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين  $s = 1$ ،  $s = 4$



## الحل

د متصلة على الفترة  $[1, 4]$ ، د(س)  $< 0$  لكل س  $\in [1, 4]$

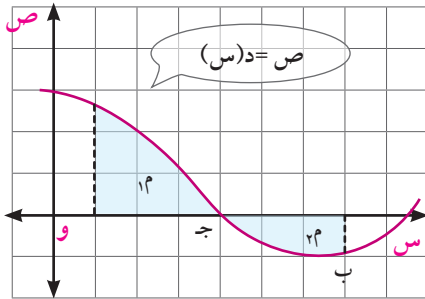
$$\therefore \int_1^4 d(s) ds = \int_1^4 (1 - s^2) ds =$$

$$= \left[ s - \frac{s^3}{3} \right]_1^4 = \left[ 4 - \frac{64}{3} \right] - \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] =$$

$$= 3 - \frac{64}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{59}{3} = -19\frac{2}{3}$$

## حاول أن تحل

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = 1، س = 2 حيث د(س) =  $s^3 + 1$



## تفكير ناقد

إذا قطع منحنى الدالة د محور السينات عند س = ج حيث ج  $\in [a, b]$  بين كيف يمكن حساب مساحة منطقة فوق محور لسينات ومحددة بمنحنى الدالة د، وأحد المستقيمين س = ا، س = ب (المنطقة م<sub>١</sub>)

## لاحظ أن:

لإيجاد المساحة يفضل إيجاد أصفار الدالة حتى لو أعطيت حدود التكامل والتي تجزئ مجال الدالة [ا، ب] إن وجدت إلى فترات جزئية.

دراسة إشارة الدالة على الفترات الجزئية إن وجدت فإذا كانت:

◀ موجبة أي د(س)  $> 0$  على الفترة [ا، ج] فإن م<sub>١</sub> =  $\int_a^j d(s) ds$

◀ سالبة أي د(س)  $< 0$  على الفترة [ج، ب] فإن م<sub>٢</sub> =  $-\int_j^b d(s) ds$

## المساحة فوق محور السينات ومنحنى دالة

## مثال

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د: د(س) =  $\sqrt{s^2 + 2}$  والمستقيم س = 3 وفوق محور السينات.

## الحل

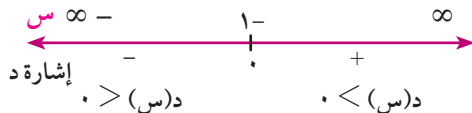
نوجد أصفار الدالة بوضع د(س) = 0

$$\therefore \sqrt{s^2 + 2} = 0 \text{ أي أن: } s = -1$$

∴ المساحة المطلوبة م =  $\int_{-1}^{\infty} \sqrt{s^2 + 2} ds$

$$= \int_{-1}^{\infty} \sqrt{s^2 + 2} ds = \left[ \frac{s}{2} \sqrt{s^2 + 2} + \ln |s + \sqrt{s^2 + 2}| \right]_{-1}^{\infty}$$

$$= \left[ \frac{s}{2} \sqrt{s^2 + 2} + \ln |s + \sqrt{s^2 + 2}| \right]_{-1}^{\infty} = \frac{3}{8} = 0.375$$



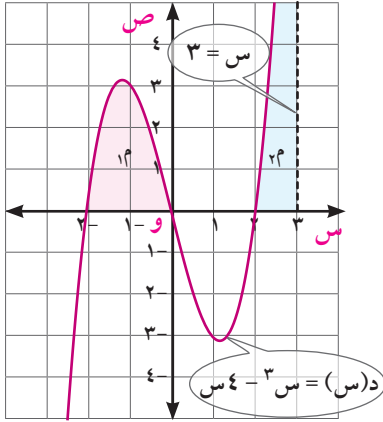


## ٤ حاول أن تحل

٢ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د: د(س) =  $\frac{س^٤}{١+س^٢}$  والمستقيم س = ٤ وتقع فوق محور السينات.

## مثال

### المساحة بين منحنى ومحور السينات



٣ إذا كانت د:  $[-٣, \infty[$  ← ح حيث د(س) =  $س^٣ - ٤س$  أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات.

## الحل

نوجد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات (أصفار الدالة)

$$د(س) = س^٣ - ٤س = س(س^٢ - ٤) = س(س - ٢)(س + ٢)$$

$$\text{عندما } د(س) = ٠ \Rightarrow س = ٠ \text{ أو } س = ٢ \text{ أو } س = -٢$$

بدراسة إشارة الدالة نجد



$$د(س) \leq ٠ \text{ على الفترة } [-٢, ٠] \text{ وعلى الفترة } [٢, \infty[$$

$$\therefore \text{المساحة } م = م_١ + م_٢ = \int_{-٢}^٠ (س^٣ - ٤س) دس + \int_٢^{\infty} (س^٣ - ٤س) دس$$

$$= \left[ \frac{١}{٤} س^٤ - ٢س^٢ \right]_{-٢}^٠ + \left[ \frac{١}{٤} س^٤ - ٢س^٢ \right]_{٢}^{\infty}$$

$$= ((٠) - ١٨ - \frac{٨}{٤}) + ((\infty) - ٠) =$$

$$= \frac{١٢١}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

## ملاحظة هامة

لتعيين المساحة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = -٢، س = ١ كما في الرسم المقابل.

نجد أن:

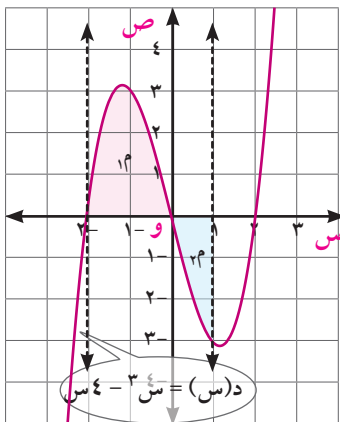
$$د(س) \leq ٠ \text{ عندما } س \in [-٢, ٠], د(س) \geq ٠ \text{ عندما } س \in [٠, ١]$$

$$\therefore \text{المساحة } م = م_١ + م_٢$$

$$= \int_{-٢}^٠ (س^٣ - ٤س) دس + \int_٠^١ (س^٣ - ٤س) دس$$

$$= \left[ \frac{١}{٤} س^٤ - ٢س^٢ \right]_{-٢}^٠ + \left[ \frac{١}{٤} س^٤ - ٢س^٢ \right]_{٠}^١$$

$$= \left( ٠ - ١٨ - \frac{٨}{٤} \right) - \left( ٠ - ٢ - \frac{١}{٤} \right) = -١٨ - ٢ + ٢ + \frac{١}{٤} = -١٨ + \frac{١}{٤}$$



## ٩ حاول أن تحل

٣ أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى  $v = 3 + 2s - s^2$  ومحور السينات.

## تفكير ناقد

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى  $v = 3 + 2s - s^2$  والمستقيمات  $s = 1$ ،  $s = 4$ ،  $v = 0$ .

## مثال

## تطبيقات معمارية للمساحة

٤ صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته  $v = -\frac{1}{4}(s - 1)(s - 7)$  حيث  $s$  بالأمتار فإذا غُطى هذا المدخل بزجاج تكلفه المتر المربع الواحد منه ١٥٠٠ جنيه كم تكون تكلفة الزجاج؟

## الحل

## نمذجة المسألة:

تكاليف زجاج مدخل الفندق = مساحة الزجاج بالأمتار المربعة  $\times$  تكلفة المتر المربع الواحد

بفرض أن التكاليف الكلية ك جنيهًا ، مساحة الزجاج م متر مربع

١

∴ ك = ١٥٠٠ م

## إيجاد مساحة الزجاج:

باعتبار المستوى الأفقي محورًا للسينات معادلته  $v = 0$  ومعادلة قوس

مدخل الفندق  $v = d(s)$  حيث:

$$d(s) = -\frac{1}{4}(s - 1)(s - 7)$$

∴ عند  $d(s) = 0$  فإن:  $s = 1$  أو  $s = 7$

فتكون  $d(s) \leq 0$  لكل  $s \in [1, 7]$

$$\text{المساحة م} = \int_1^7 \left( -\frac{1}{4}(s - 1)(s - 7) \right) ds = \int_1^7 \left( -\frac{1}{4}(s^2 - 8s + 7) \right) ds$$

من ١، ٢

$$= \left[ -\frac{1}{12}s^3 + 2s^2 - \frac{7}{4}s \right]_1^7 = 18 - \left( -\frac{5}{12} \right) = \frac{211}{12}$$

∴ ك = ٢٧٠٠٠ = ١٨  $\times$  ١٥٠٠

أى أن: تكلفة تغطية مدخل الفندق بالزجاج تساوى ٢٧٠٠٠ جنيه

## ٩ حاول أن تحل

٤ إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه وتم تغطية

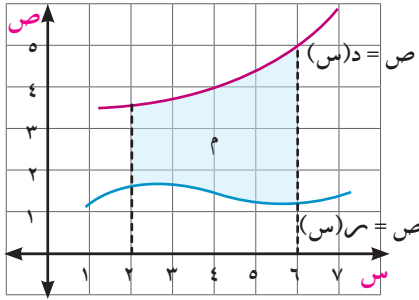
٥ ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة  $d$ ، والمستقيمين  $s = 0$ ،  $v = 0$

حيث  $d(s) = 12 - \frac{1}{3}s^2$ . أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.

## ثانيًا: مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين

تعريف

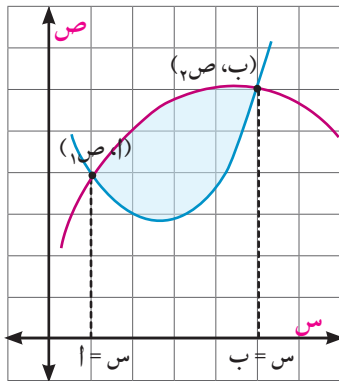
إذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب]، وكان د(س) ≤ ر(س) لكل س ∈ [أ، ب]، فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = د(س) و ص = ر(س) والمستقيمين س = أ، س = ب تعطى بالعلاقة

$$م = \int_a^b [د(س) - ر(س)] دس$$


في الشكل المقابل لاحظ أن:

د، ر متصلتان على الفترة [أ، ب]  
 د(س) < ر(س) لكل س ∈ [أ، ب]  
 إذا كانت المساحة بين منحنى د(س) ومحور السينات = م<sub>١</sub>  
 والمساحة بين منحنى ر(س) ومحور السينات = م<sub>٢</sub>  
 فإن المساحة م بين منحنى د(س)، ر(س) = م<sub>٢</sub> - م<sub>١</sub>

**أي أن:** م =  $\int_a^b د(س) دس - \int_a^b ر(س) دس = \int_a^b [د(س) - ر(س)] دس$



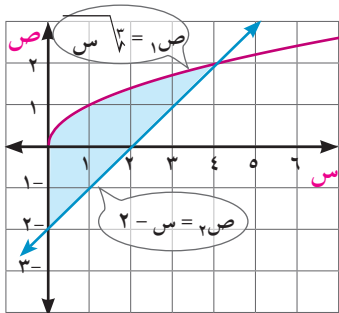
**ملاحظة هامة:** عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هي الإحداثيات السينية لنقط التقاطع.

مثال

مساحة منطقة بين منحنين متقاطعين

٥ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص<sub>١</sub> = √س، والمستقيم ص<sub>٢</sub> = س - ٢ ومحور الصادات

الحل



لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع نضع ص<sub>١</sub> = ص<sub>٢</sub>

س - ٢ = √س بتريع الطرفين

أي: س<sup>٢</sup> - ٤س + ٤ = س

س(س - ١) = ٠

عند س = ١

**أي أن** ص<sub>١</sub> ≠ ص<sub>٢</sub>

∴ عند س = ١ لا توجد نقط تقاطع للمنحنيين

عند س = ٤

ص<sub>١</sub> = √٤ = ٢، ص<sub>٢</sub> = ٤ - ٢ = ٢

∴ ص<sub>١</sub> = ص<sub>٢</sub>

∴ حدا التكامل هما س = ٤، س = ٠ (محور الصادات) ومنحنياً ص<sub>١</sub>، ص<sub>٢</sub> متصلان على الفترة [٤، ٠]

نأخذ قيمة إختيارية تنتمي إلى الفترة [٤، ٠] ولتكن س = ٢

عند س = ٢

ص<sub>١</sub> = √٢، ص<sub>٢</sub> = ٢ - ٢ = ٠

أى أن  $v_1 \leq v_2$  لكل  $s \in [0, 4]$

∴ مساحة المنطقة =  $\int_0^4 (v_2 - v_1) ds = \int_0^4 (2 - s) ds = (2s - \frac{1}{2}s^2) \Big|_0^4 = 8 - 8 = 0$  وحدة مربعة

## ٩ حاول أن تحل

٥ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د، ر حيث:

$$د(س) = 3 - 2س^2, \quad ر(س) = 3 - (1 + س)^2$$

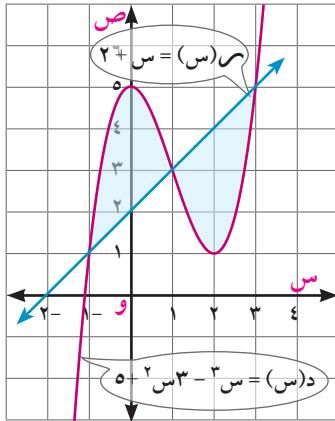
## تعدد المناطق بين منحنين متقاطعين

مثال

٦ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومنحنى الدالة ر حيث

$$د(س) = 3س^3 - 3س^2 + 5, \quad ر(س) = 3س^2 + 5$$

الحل:



لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع:

$$نضع د(س) = ر(س)$$

$$3س^3 - 3س^2 + 5 = 3س^2 + 5$$

$$3س^3 - 3س^2 - 3س^2 = 0$$

$$3س^3 - 6س^2 = 0$$

$$3س^2(س - 2) = 0$$

$$3س^2(س - 2) = 0$$

$$س = 0 \text{ أو } س = 2 \text{ أو } س = 3$$

∴ يكون التكامل على الفترتين  $[0, 2]$ ،  $[2, 3]$  لإيجاد المساحة المطلوبة وهي عبارة عن مساحتين أى:

$$م = م_1 + م_2$$

$$م = \int_0^2 [د(س) - ر(س)] ds + \int_2^3 [ر(س) - د(س)] ds$$

$$= \int_0^2 (3س^3 - 3س^2 + 5 - 3س^2 - 5) ds + \int_2^3 (3س^2 + 5 - 3س^3 + 3س^2 - 5) ds$$

$$= \int_0^2 (-6س^2) ds + \int_2^3 (6س^2 - 3س^3) ds$$

$$= -2س^3 \Big|_0^2 + (2س^3 - \frac{3}{4}س^4) \Big|_2^3 = -16 + (13.5 - 9) = -2.5$$

## ٩ حاول أن تحل

٦ تقوم شركة إعلانات بإنتاج ملصق لتسويق سلعة ما فإذا كان الملصق على شكل منطقة محددة بمنحنى

الدالتين د، ر حيث د(س) =  $2س^2$ ، ر(س) =  $س^2 - 2س^2$ ، س مقدرة بالديسمتر. احسب المساحة اللازمة من

الورق اللاصق لإنتاج ١٠٠٠ ملصق لهذه السلعة.

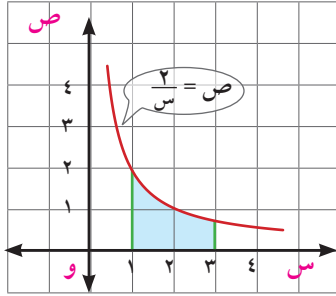
∴ باستخدام برنامج رسومي ارسم هذا الملصق وابحث أبسط الطرق لإيجاد مساحته.



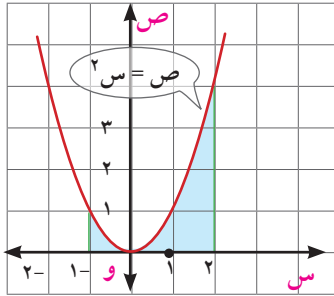
## تمارين ٤ - ٤



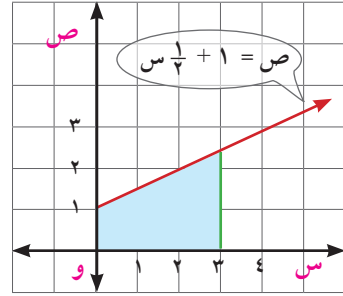
اكتب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة الملونة في كل مما يأتي واحسب قيمته.



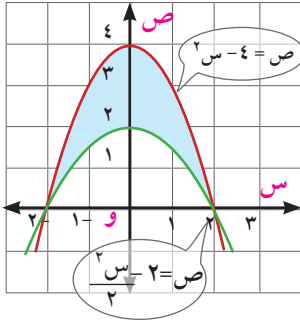
١



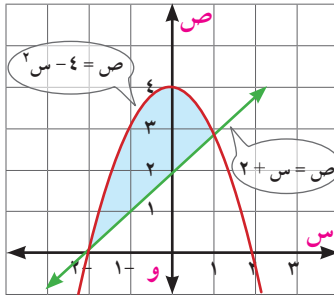
٢



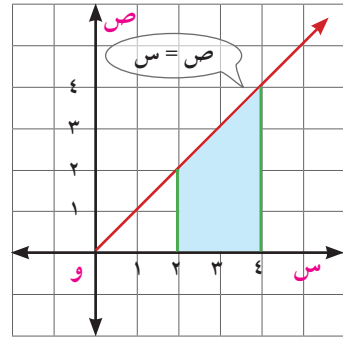
٣



٤



٥

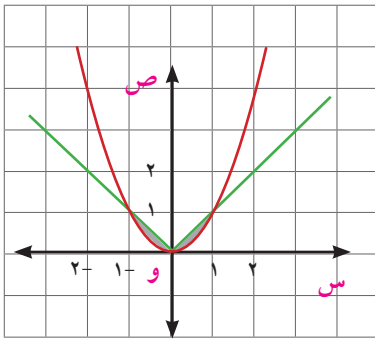


٦

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

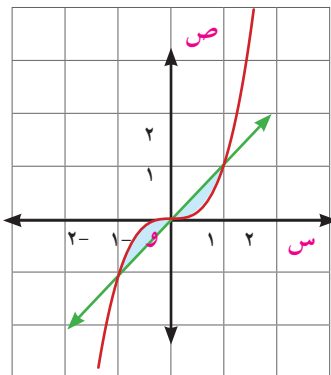
٧ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين  $ص = س^2$ ،  $ص = |س|$  تساوي:

- أ.  $\int_{-2}^2 (س^2 - س) دس$  ب.  $\int_{-2}^2 (س - س^2) دس$  ج.  $\int_{-2}^2 (س - س^2) دس$  د.  $\int_{-2}^2 (س^2 - س) دس$



٨ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى  $ص = س^3$  والمستقيم  $ص = س$ ، تساوي:

- أ.  $\int_{-2}^2 (س^3 - س) دس$  ب.  $\int_{-2}^2 (س - س^3) دس$  ج.  $\int_{-2}^2 (س^3 - س) دس$  د.  $\int_{-2}^2 (س - س^3) دس$



٩ مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمتين  $ص = س$ ،  $ص = 2$ ،  $ص = 0$ ؛ تساوي:

- أ.  $\frac{1}{2}$  ب. ١ ج. ٢ د. ٤

١٠ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى  $ص = س^3$  والمستقيمتين  $ص = 2$ ،  $ص = 0$  تساوي:

- أ. ٨ ب. ٤ ج. ٢ د. ١



فى كل مما يأتى إحسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين:

١١ المنحنى  $ص = ٥ - س^٢$  ومحور السينات والمستقيمين  $س = ٢$  ،  $س = ١$

١٢ المستقيمت:  $س + ٢ = ص$  ،  $س = ١$  ،  $س = ٣$  ،  $ص = ٠$

١٣ المنحنى  $ص = \sqrt{س + ٤}$  والمستقيمت  $س = ٠$  ،  $س = ٥$  ،  $ص = ٠$

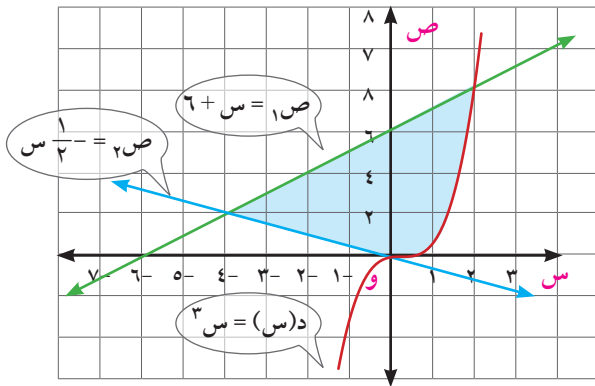
١٤ المنحنى  $ص = ٣ - س^٢$  ومحور السينات

١٥ المنحنى  $ص = \frac{٤}{س^٢}$  والمستقيمت  $س = ١$  ،  $س = ٤$  ،  $ص = ٠$

١٦ منحنى الدالة د:  $د(س) = (٣ - س)(١ - س)$  ومحورى الاحداثيات حيث  $د(س) \leq ٠$

١٧ منحنى الدالة د:  $د(س) = (١ - س)(٢ - س)(٣ - س)$  والمستقيمين  $س = ٤$  ،  $ص = ٠$  حيث  $د(س) \leq ٠$

١٨ منحنى الدالتين د، ر حيث  $د(س) = ٢س^٢$  ،  $ر(س) = ٢س + ٤$



١٩ باستخدام التكامل المحدد أثبت أن مساحة المثلث

الذى طول قاعدته يساوى أ وارتفاعه يساوى ب  
هى  $\frac{١}{٢} أب$

٢٠ **تفكير إبداعى:** فى الشكل المقابل أوجد مساحة

المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمين  $ص_١$  ،  
 $ص_٢$  حيث:

د(س) =  $س^٣$  ،  $ص_١ = س + ٦$  ،  $ص_٢ = -\frac{١}{٢}س$

## Volumes of Revolution Solids

## سوف تتعلم

- التعرف على الحجم كتكامل محدد.
- استخدام التكامل المحدد في إيجاد الحجوم.
- إيجاد حجم دوراني ناتج عند دوران منطقة محددة بمنحنيين.

## المصطلحات الأساسية

- محور الدوران Axis of Revolution
- مجسم دوراني Solid of Revolution

## الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

## فكر و ناقش



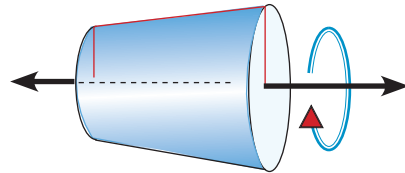
هل شاهدت صانع الفواخير وهو يحول التراب إلى تحف وأواني طهى طعام بخلط الطين الأسواني بالماء وتقطيعه ووضعه حول محور يدور؛ فيشكله بأصابعه وأدواته؛ لينتج أجساماً ذات أشكال جذابة. بما تسمى هذه الأجسام؟



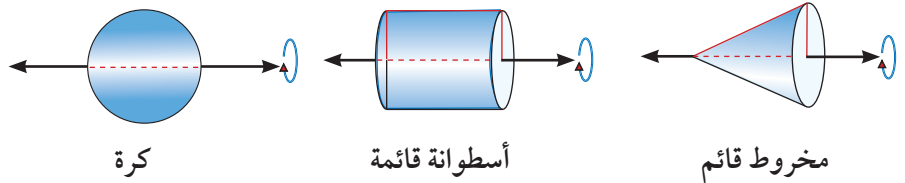
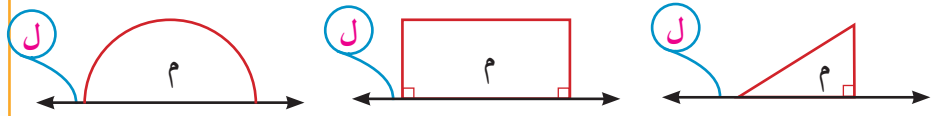
تصمم العبوات البلاستيكية لتعبئة المياه الغازية والعصائر والزيوت بأحجام مختلفة وسعات متعددة. كيف يمكن حساب حجمها أو سعتها عند تصميمها؟

## Solid of Revolution

## المجسم الدوراني



ينشأ المجسم الدوراني من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها يسمى «محور الدوران». توضح الأشكال التالية أمثلة لمجسمات دورانية ترسمها المساحة م عند دورانها دورة كاملة حول المستقيم ل



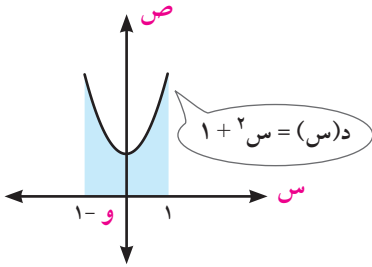
أولاً: حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور

إذا كانت دالة متصلة على الفترة  $[a, b]$ ،  $d(s) \geq 0$  لكل  $s \in [a, b]$  فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى  $d(s)$  ومحور السينات والمستقيمين  $s = a$ ،  $s = b$  دورة كاملة حول محور السينات هو:  $H = \int_a^b [d(s)]^2 ds$

نظريّة

مثال

## دوران حول محور السينات



١ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة  $d$  ومحور السينات والمستقيمين  $s = -1$ ،  $s = 1$  دورة كاملة حول محور السينات علماً بأن  $d(s) = s^2 + 1$

الحل:

الدالة  $d$  كثيرة الحدود متصلة على الفترة  $[-1, 1]$ ،

$d(s) \geq 0$  لكل  $s \in [a, b]$

بفرض أن حجم الجسم الناشئ من الدوران  $H$

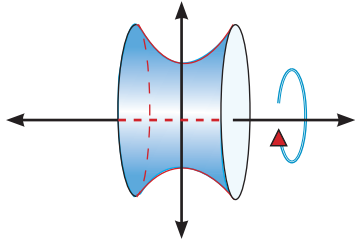
$$\therefore H = \pi \int_{-1}^1 (s^2 + 1)^2 ds$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (s^4 + 2s^2 + 1) ds$$

$$= \pi \left[ \frac{s^5}{5} + \frac{2s^3}{3} + s \right]_{-1}^1 = \frac{16\pi}{15}$$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة  $d$  ومحور السينات والمستقيمين  $s = 0$ ،  $s = 3$  دورة كاملة حول محور السينات علماً بأن  $d(s) = s$  ما اسم الجسم الناشئ؟ بين كيف نتحقق هندسياً من صحة إجابتك.

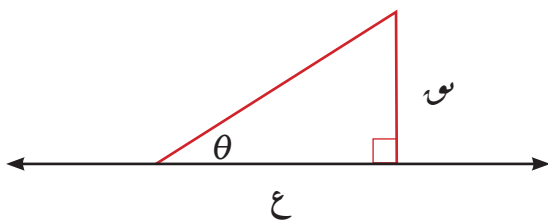


## تطبيقات الحجوم

مثال

٢ باستخدام التكامل أثبت أن حجم المخروط الدائري القائم يساوي  $\frac{\pi}{3} r^2 h$  حيث  $r$  هو طول نصف قطر قاعدته،  $h$  ارتفاعه.

الحل:



ينتج المخروط الدائري القائم عن دوران مثلث قائم الزاوية بحيث يقع أحد ضلعي القائمة على محور السينات دورة كاملة حول محور السينات.

نوجد العلاقة بين  $s$  ،  $v$  =  $d(s)$

$$\text{طا} = \frac{v}{s} = \theta \quad (١) \quad \therefore v = s \cdot \theta \quad \text{ظا} = d(s)$$

$$\therefore \text{ح} = \int_0^s \pi [d(s)]^2 ds = \int_0^s \pi s^2 \theta^2 ds$$

$$= \left[ \frac{\pi s^3 \theta^2}{3} \right]_0^s = \frac{\pi s^3 \theta^2}{3} \quad (٢)$$

$$\text{من (١) طا} = \frac{v}{s} = \theta \quad \therefore \frac{v}{\theta} = s$$

$$\therefore \text{طا}^2 = \frac{v^2}{\theta^2} = \frac{v^2}{\frac{v}{s}} = v \cdot s$$

$$\therefore \text{ح} = \int_0^s \pi v \cdot s ds = \pi \cdot \frac{v}{2} \cdot s^2 = \frac{\pi v s^2}{2} \quad \text{بالتعويض في (٢)}$$

#### ٩ حاول أن تحل

٢ باستخدام التكامل أثبت أن:

أ حجم الكرة =  $\frac{4}{3} \pi r^3$  (  $r$  طول نصف قطر الكرة )

ب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة =  $\pi r^2 h$  (  $r$  طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ،  $h$  ارتفاعها )

#### مثال

#### دوران حول محور السينات

٣ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  ومحور السينات، حيث  $x$ ،  $y$  ثابتان، دورة كاملة حول محور السينات.

الحل:

$\therefore$  الدوران حول محور السينات

$$\therefore v = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \therefore v^2 = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2$$

حدود التكامل:

$$v = 0 \quad \therefore s = 1 \quad \text{أي أن } s = 1, \quad s = 0$$

(لماذا؟)

$$\text{ح} = \int_0^1 \pi \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4} \right) dx$$

$$= \pi \left[ -\frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{1}{3x^3} \right]_0^1 = \pi \left( -1 + 0 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{4\pi}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \quad \text{وحدة مكعبة.}$$

#### ٩ حاول أن تحل

٣ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $y = x^2 - x^3$  ومحور السينات، دورة كاملة حول محور السينات.

تذكر أن



معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (٠، ٠) وطول نصف قطرها (  $r$  ) هي:  $x^2 + y^2 = r^2$

## ملاحظة هامة

إذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور السينات

فإن:

والمستقيمين  $s = a$ ،  $s = b$

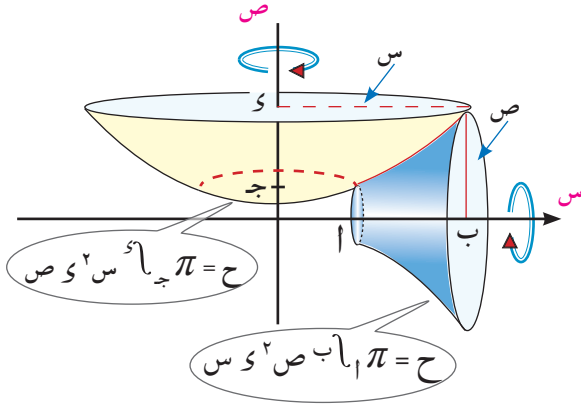
$$ح = \pi \int_a^b s^2 ds$$

إذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور الصادات

فإن:

والمستقيمين  $s = c$ ،  $s = d$

$$ح = \pi \int_c^d s^2 ds$$



## مثال

## دوران حول محور الصادات

٤ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $s = 1 + s^2$  ومحور الصادات والمستقيم  $s = 0$  دورات كاملة حول محور الصادات.

الحل:

∴  $s = 1 + s^2$  والدوران حول محور الصادات

∴  $s^2 = 1 - s$

$s = 1$

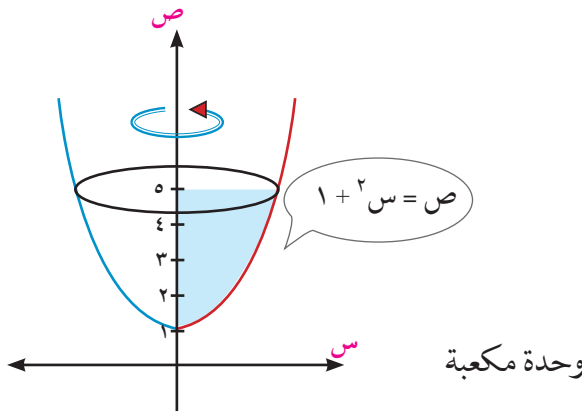
عند  $s = 0$

$s = 1$ ،  $s = 0$

حدود التكامل

$$ح = \pi \int_0^1 s^2 ds = \pi \int_0^1 (1 - s) ds$$

$$\pi \int_0^1 (1 - s) ds = \pi \left[ s - \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$



## ٥ حاول أن تحل

٤ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $s = s^2$  ومحور الصادات والمستقيمين  $s = 0$ ،  $s = 6$  دورات كاملة حول محور الصادات.

## ثانياً: حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين

إذا كانت  $d$ ،  $r$  دالتين متصلتين على الفترة  $[a, b]$ ،  $d(s) \leq 0$ ،  $h(s) \leq 0$  لكل  $s \in [a, b]$ ، فإن حجم الجسم الدوراني ح الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين والمستقيمين  $s = a$ ،  $s = b$  دورة كاملة حول محور السينات هو:

$$ح = \pi \int_a^b [d(s)^2 - h(s)^2] ds$$

نظرية



### لاحظ أن

١- إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين  $ص_1 = د(س)$ ،

$$ص_2 = ر(س) \text{ حيث } ص_1 \leq ص_2 \text{ لكل } س \in [أ، ب]$$

وهي المنطقة الملونة بالشكل المقابل، دورة كاملة حول محور السينات فإن الإحداثيين السينيين لنقطتي تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل أ، ب حيث  $أ > ب$  ويكون حجم الجسم الناشئ ح هو:

$$ح = \pi \int_A^B (ص_2^2 - ص_1^2) دس$$

$$\text{أي: } ح = \pi \int_A^B ص_2^2 دس - \pi \int_A^B ص_1^2 دس$$

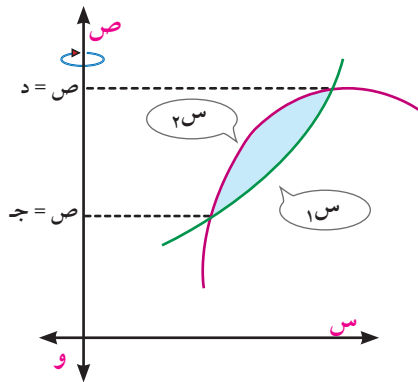
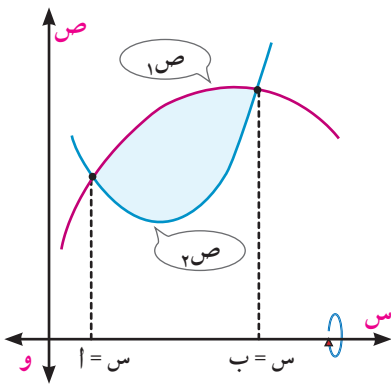
٢- إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين

$$ص_1 = د(ص)، ص_2 = ر(ص) \text{ حيث } ص_1 \leq ص_2$$

لكل  $ص \in [ج، د]$  دورة كاملة حول محور الصادات فإن الإحداثيات الصاديين لنقطتي التقاطع هما حدود التكامل ج، د حيث  $ج > د$  ويكون

$$ح = \pi \int_J^D (ص_2^2 - ص_1^2) دص$$

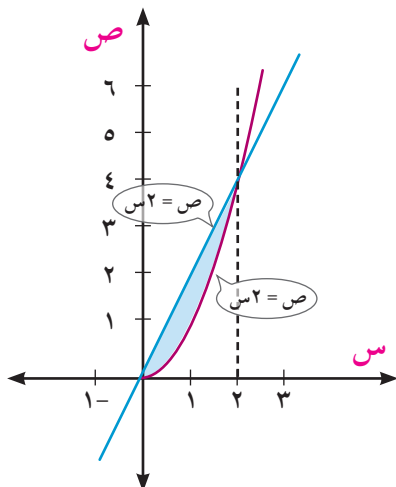
$$\text{أي: } ح = \pi \int_J^D ص_2^2 دص - \pi \int_J^D ص_1^2 دص$$



### دوران منطقة محددة بمنحنيين حول محور السينات

٥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $ص = س^2$  والمستقيم  $ص = ٢$  دورة كاملة حول محور السينات.

الحل:



$$\text{بفرض } ص_1 = س^2، ص_2 = ٢$$

لإيجاد نقط التقاطع نضع  $ص_1 = ص_2$

$$\therefore س = ٠ \text{ أو } س = ٢$$

$\therefore ص_1 \leq ص_2$  لكل  $س \in [٠، ٢]$  كما هو واضح من الشكل

$$\therefore ح = \pi \int_0^2 (ص_2^2 - ص_1^2) دس$$

$$= \pi \int_0^2 (٢^2 - (س^2)^2) دس$$

$$\therefore ح = \pi \int_0^2 (٤ - س^4) دس$$

$$= \pi \left[ ٤س - \frac{س^5}{٥} \right]_0^2$$

$$= \pi \left( \frac{٣٢}{٥} - ٠ \right) = \frac{٣٢}{٥} \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

## ٩ حاول أن تحل

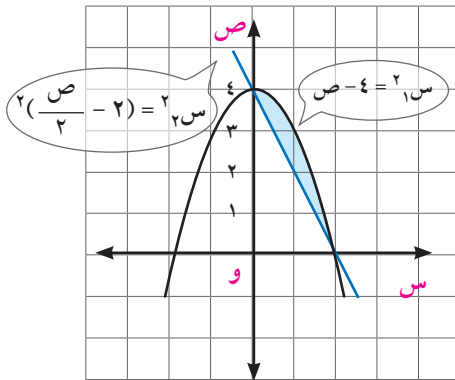
- ٥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين  $\sqrt{s}$  ،  $s = 2$  دورة كاملة حول محور السينات.

## مثال

## دوران منطقة محددة بمنحنيين حول محور الصادات

- ٦ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $s - 4 = s^2$  ، والمستقيم  $s^2 + s = 4$  دورة كاملة حول محور الصادات.

## الحل:



∴ الدوران حول محور الصادات

$$\therefore s_1 = s - 4 = s^2 \text{ ، } s_2 = s^2 + s = 4$$

عند نقط التقاطع  $s_1 = s_2$

$$s - 4 = s^2 \Rightarrow s^2 + s - 4 = 0 \quad \therefore s = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$s = (s - 4) = 0 \quad s = 0 \text{ ، } s = 4$$

$$\text{ويكون } s_1 < s_2 \text{ لكل } s \in [4, 0]$$

$$ح \pi = \int_{-2}^2 (s_2 - s_1) ds = \int_{-2}^2 (s^2 + s - (s^2 - 4)) ds = \int_{-2}^2 (s + 4) ds$$

$$= \left[ \frac{s^2}{2} + 4s \right]_{-2}^2 = \left( \frac{4}{2} + 8 \right) - \left( \frac{4}{2} - 8 \right) = 16$$

$$= 16 \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

## ٩ حاول أن تحل

- ٦ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين  $\sqrt{s} = s^2$  ،  $s = 1$  دورة كاملة حول محور الصادات.

## تمارين ٤ - ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $\sqrt{s} = s^2$  ،  $s = 0$  ،  $s = 1$  دورة كاملة حول محور السينات يساوي

٥  $\pi$

ج  $\pi$

ب  $\pi$

أ  $\pi -$

- ٢ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $\frac{1}{s} = s$  ، والمستقيمين  $s = 1$  ،  $s = 2$  ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات يساوي

٥  $\pi$

ج  $\pi$

ب  $\frac{\pi}{2}$

أ  $\frac{\pi}{4}$

٣ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $v = s^2$  والمستقيم  $v = 1$  دورة كاملة حول محور الصادات يساوي

٥  $\pi^2$

ج  $\pi \frac{1}{4}$

ب  $\pi \frac{1}{2}$

أ  $\pi$

٤  $\pi \sqrt{2} (4 - s^2)$  ، هو حجم كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات  
ج كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة

ب مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ وحدات

د أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات في كل مما يأتي:

٦  $v = 3 - s$  ،  $s = 0$  ،  $v = 0$

٥  $v = s$  ،  $s = 3$  ،  $v = 0$

٨  $v = |s|$  ،  $s = -2$  ،  $s = 4$  ،  $v = 0$

٧  $v = \frac{1}{s}$  ،  $s = 1$  ،  $s = 4$  ،  $v = 0$

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات في كل مما يأتي:

١٠  $v = s^2$  ،  $s = 0$  ،  $v = 0$  ،  $v = 8$

٩  $v = s$  ،  $v = 1$  ،  $s = 0$

١٢  $v = s^3$  ،  $s = 0$  ،  $v = 0$  ،  $v = 8$

١١  $v = 4 - s^2$  ،  $s = 0$  ،  $v = 0$

١٣  $s^2 + v = 0$  ،  $s = 0$  ،  $v = 0$  ،  $v = 3$

أجب عن كل مما يأتي:

١٤ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $v = 4 - s$  والمستقيم  $s = 0$  عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة.

ثانيًا: حول محور الصادات

أولاً: حول محور السينات

١٥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $v = \frac{4}{s}$  والمستقيم  $s + v = 5$  دورة كاملة حول محور السينات.

١٦ **تفكير إبداعي:** إذا كانت النقط  $(-2, 0)$  ،  $(1, 5)$  ،  $(4, 0)$  رؤوس المثلث أ ب ج فأوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المثلث أ ب ج دورة كاملة حول محور السينات.



## ملخص الوحدة

تفاضلي الدالة: إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوي س ، ص = د(س) فإن:

و ص = د(س) و س حيث و ص تفاضلي ص ، و س تفاضلي س.

التكامل بالتعويض: إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين وبه يحول التكامل المعطى إلى تكامل قياس

معروف، فإذا كانت ع = س(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن:

$$ل د(س) = ل(س) س = ل د(ع) و ع$$

التكامل بالتجزئ: إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى، فإذا كانت

ص، ع دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ف **فإن:** ل ص و ع = ص ع - ل ع و ص

جدول التكامل الأساسية (القياسية)	
$ل قاس طاس و س = قاس + ث$ $س \neq \pi \frac{1+n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$ل س ن و س = \frac{1+n}{1+n} + ث$ $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$
$ل قتا ظتا س و س = - قتا س + ث$ $س \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$ل جاس و س = - جتا س + ث$
$ل هـ س و س = هـ س + ث$	$ل جتا س و س = - جاس + ث$
$ل قاس و س = قاس + ث$ $س \neq \pi \frac{1+n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$ل قاس و س = قاس + ث$ $س \neq \pi \frac{1+n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
$ل قتا و س = - قتا س + ث$ $س \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$ل قتا و س = - قتا س + ث$ $س \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

◀ إضافة الثابت (ب) إلى المتغير المستقل لا يؤثر على صيغة التكامل.

◀ عند ضرب المتغير س بالمعامل (أ) يحتفظ التكامل بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل.

التكامل المحدد:

**نظرية:**

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة،

فإن  $ل ب د(س) و س = ل(ب) - ل(أ)$

خواص المتكامل المحدد:

②  $ل ب د(س) و س = ٠$

①  $ل ب د(س) و س = - ل ب د(س) و س$

لكل جـ  $\exists [أ، ب]$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{L}_1^b \text{ د(س) و س} = \mathcal{L}_1^b \text{ د(س) و س} + \mathcal{L}_1^b \text{ د(س) و س}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{L}_1^b \text{ د(س) و س} = 0 \quad (\text{دالة فردية})$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{L}_1^b \text{ د(س) و س} = \mathcal{L}_1^b \cdot 2 \text{ د(س) و س} \quad (\text{دالة زوجية})$$

➤ مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة د على الفترة  $[أ، ب]$  والمستقيمين

$$\text{س} = أ، \text{س} = ب \text{ حيث د(س)} \leq 0 \text{ هي: م} = \mathcal{L}_1^b \text{ د(س) و س}$$

➤ مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين د، ر المتصلتين على الفترة  $[أ، ب]$  والمستقيمين

$$\text{س} = أ، \text{س} = ب \text{ حيث د(س)} \leq \text{ر(س)} < 0 \text{ هي: م} = \mathcal{L}_1^b [\text{د(س)} - \text{ر(س)}] \text{ و س}$$

#### الحجوم الدورانية:

ينشأ المجسم الدوراني من دوان منطقة مستوية دورة كاملة حول خط مستقيم يسمى محور الدوران.

➤ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د المتصلة على الفترة  $[أ، ب]$  ومحور السينات

والمستقيمين  $\text{س} = أ، \text{س} = ب$  دورة كاملة حول محور السينات حيث  $\text{د(س)} \leq 0$  هو

$$\text{ح} = \pi \mathcal{L}_1^b [\text{د(س)}]^2 \text{ و س}$$

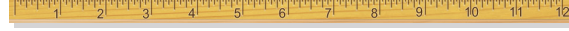
➤ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د، ر المتصلتين على الفترة  $[أ، ب]$

والمستقيمين  $\text{س} = أ، \text{س} = ب$  دورة كاملة حول محور السينات حيث  $\text{د(س)} \leq \text{ر(س)} < 0$  هو:

$$\text{ح} = \pi \mathcal{L}_1^b [\text{د(س)}^2 - \text{ر(س)}^2] \text{ و س}$$



# تمارين عامة



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان د(س) =  $\sqrt{3س - ٥}$  و كان د(٢) = ٣ ، فإن د(٢-) =

- أ - ٦      ب - ٣-      ج - ٧      د - ١٢

٢ إذا كان  $\frac{ص}{س} = \frac{١}{س} + ص$  ،  $\frac{١}{٢} =$  عند س = ١ ، عندما س = هـ فإن ص تساوي:

- أ - هـ - ٢ هـ      ب -  $\frac{١ - ٢}{٢}$  هـ      ج -  $\frac{١ + ٢}{٤}$  هـ      د -  $١ + \frac{٢}{٢}$  هـ

٣  $\sqrt[٢]{ظا}$  س و س يساوي

- أ - ظاس - س + ث      ب - ظاس + س + ث      ج - قاء س + ث      د -  $\frac{١}{٣}$  ظا س + ث

٤ إذا كان  $\sqrt[٢]{١٠}$  د(س) و س = ٤ ، فإن  $\sqrt[٢]{١٠}$  [٣ د(س) - ١] و س يساوي

- أ - ٩      ب - ١١      ج - ١٢      د - ٨-

٥ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى د(س) = س<sup>٢</sup> ومحور السينات والمستقيمين

س = -٢ ، س = ٢ دورة واحدة حول محور السينات يساوي

- أ -  $\frac{\pi ١٦}{٥}$       ب -  $\frac{\pi ٣٢}{٥}$       ج -  $\frac{\pi ٦٤}{٥}$       د -  $\pi ٤$

أوجد تفاضلي كل من:

٦ ص =  $٣س - ١$       ٧ ص =  $\sqrt[٢]{٣ + ٢س}$       ٨ ص =  $(س + \frac{١}{س})^٢$

٩ ص = هـ - س<sup>٥</sup>      ١٠ ص = هـ - س<sup>٣</sup> + س<sup>٢</sup>      ١١ ص = هـ - حتا س<sup>٢</sup>

١٢ ع = لو (س + ١)      ١٣ ع = لو  $(\frac{١}{س})^٢$       ١٤ ع = لو ظتا (س - ١)

عبر عن كل مما يأتي باستخدام تكامل واحد

١٥  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> و س<sup>٢</sup> +  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> و س<sup>٢</sup>      ١٦  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> و س<sup>٢</sup> -  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> و س<sup>٢</sup> + ٦ و س<sup>٢</sup>

١٧  $\sqrt[٢]{١٠}$  ك و س +  $\sqrt[٢]{١٠}$  ك و س      ١٨  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> و س<sup>٢</sup> +  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> و س<sup>٢</sup> + ٤ و س<sup>٢</sup>

أجب عن ما يأتي:

١٩ إذا كان  $\sqrt[٢]{١٠}$  د(س) و س = ٥ ،  $\sqrt[٢]{١٠}$  س(س) و س = ٣- فأوجد:

- أ -  $\sqrt[٢]{١٠}$  د(س) و س      ب -  $\sqrt[٢]{١٠}$  س(س) و س<sup>٢</sup>      ج -  $\sqrt[٢]{١٠}$  [٣ د(س) - ٢ س(س)] و س      د -  $\sqrt[٢]{١٠}$  س(س) و س<sup>٢</sup> + ٤ و س

٢٠ إذا كان د(س) = ٦ - س - ٤ ، د(١) = ٢ ، د(٠) = ٤- فأوجد د(س)

أوجد التكاملات المحددة التالية:

٢١  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> (س +  $\frac{١}{س}$ ) و س      ٢٢  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> - ٦ س<sup>٢</sup> و س      ٢٣  $\sqrt[٢]{١٠}$  س<sup>٢</sup> - ١ س<sup>٢</sup> و س

$$\textcircled{24} \quad \sqrt[3]{\frac{8+s}{2+s}} \quad \textcircled{25} \quad \sqrt[4]{16-s^2} \quad \textcircled{26} \quad \sqrt[2]{4-s^2} \quad \text{و } s$$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:

$$\textcircled{27} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds \quad \textcircled{28} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds \quad \textcircled{29} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds$$

$$\textcircled{30} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds \quad \textcircled{31} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds \quad \textcircled{32} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds$$

باستخدام التجزىء المناسب أوجد التكاملات الآتية:

$$\textcircled{33} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds \quad \textcircled{34} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds \quad \textcircled{35} \quad \int \frac{s}{(s^2+1)^3} ds$$

أجب عن يلي:

$$\textcircled{36} \quad \text{أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين } s^2 + 7 = 2s - s^2, \text{ و } s = (1 - s)^2$$

$$\textcircled{37} \quad \text{أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين } s = 9 - s^2, \text{ و } s = s^2 + 1 \text{ والمستقيمين } s = 0, s = 3$$

$$\textcircled{38} \quad \text{أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين } s = 9 - s^2, \text{ و } s = s^2 + 1 \text{ ومحور السينات والمستقيمين } s = 0, s = 3$$

$$\textcircled{39} \quad \text{أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى } s = \frac{1}{s-1} \text{ والمستقيمين } s = 2, s = 4 \text{ ومحور السينات دورة كاملة حول.}$$

أ محاور السينات ب محاور الصادات

$$\textcircled{40} \quad \text{أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى } s = \sqrt{3s} \text{ ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة (2, 2) الواقعة عليه عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات.}$$



## اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية:

١.  $(٤ - \text{قتا س} \text{ظتا س})$  و  $\text{س}$  يساوي:

- أ  $٤\text{س} - \text{قتا س} + \text{ث}$       ب  $٤\text{س} + \text{قتا س} + \text{ث}$   
ج  $٤\text{س} - \text{ظتا س} + \text{ث}$       د  $٤\text{س} + \text{ظتا س} + \text{ث}$

٢.  $\frac{٥\text{س}}{٣ - \text{س}}$  و  $\text{س}$  يساوي:

- أ  $-\frac{١}{٣}(\text{هـ س} - ٣) + \text{ث}$       ب  $-\frac{١}{٣}(\text{لو هـ س} - ٣) + \text{ث}$   
ج  $\frac{١}{٣}(\text{لو هـ س} - ٣) + \text{ث}$       د  $-\frac{١}{٣}(\text{لو هـ س} - ٣) + \text{ث}$

٣.  $٢(|\text{س}| - ٢)$  و  $\text{س}$  يساوي:

- أ  $٤$       ب  $٢$       ج  $١$       د  $\text{صفر}$

٤. مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى  $\sqrt{٢ - ٤\text{س}}$  ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة يساوي: .....

- أ  $٢$       ب  $٤$       ج  $٢\pi$       د  $٤\pi$

٥. إذا كان  $\sqrt[٣]{١}$  د (س) و  $\text{س} = ٥$ ،  $\sqrt[٣]{١}$  س (س) =  $٧$ ، فإن  $\sqrt[٣]{١}$  د (س) + (س) س (س) + (س)  $٣$  و  $\text{س}$  يساوي:

- أ  $١٢ -$       ب  $٧ -$       ج  $١٢$       د  $١٩$

٦. حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بين المنحنى  $\frac{٢}{\text{س}}$  والمستقيمات  $\text{س} = ١$ ،  $\text{س} = ٤$ ،  $\text{ص} = ٠$  دورة كاملة حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة يساوي: .....

- أ  $\frac{\pi}{٣}$       ب  $\frac{\pi}{٢}$       ج  $٢\pi$       د  $٣\pi$

اجب عن ما يأتي:

٧. أوجد التكاملات الآتية:

- أ  $\int \frac{٣ + \text{س}}{\sqrt{٦ + ٢\text{س}}} \text{س}$       ب  $\int \sqrt{٢ - ٣\text{س}} \text{س}$

٨. إذا كانت د (س) =  $\sqrt{١ + \text{س}}$  ( $٢\text{س} + ٤\text{س} - ١$ ) و  $\text{س}$ ، د (٢) =  $١$  فأوجد د (٣)

٩. أوجد التكاملات الآتية:

- أ  $\int \sqrt{١ + \text{س}} \text{س}$       ب  $\int \sqrt{١ + \text{س}} \text{س}$

١٠ أوجد التكاملات الآتية:

أ  $\int_0^2 x^2 \ln x \, dx$

ب  $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$

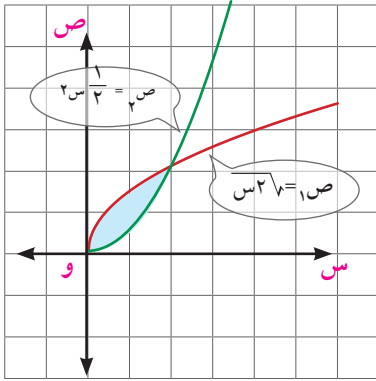
١١ أوجد قيمة كل من ما يأتي:

أ  $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

ب  $\int_0^1 x^2 (x^2 - 3) \, dx$

١٢ إذا كان  $\int_0^1 x^2 \, dx = 8$ ،  $\int_0^1 x \, dx = 3$  احسب قيمة  $\int_0^1 x^3 \, dx$

١٣ أوجد بالوحدات المربعة مساحة المنطقة المحددة بمنحنى  $y = (x-2)^3$  ومحور السينات في الفترة  $[2, 4]$



١٤ يوضح الشكل المقابل المنطقة المحددة بالمنحنيين  $y_1 = x^3$ ،  $y_2 = \frac{1}{x}$  أوجد:

أ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين  $y_1$ ،  $y_2$

ب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين  $y_1$ ،  $y_2$  دورة كاملة حول محور السينات.

إذا لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة إلى الجدول الآتي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
ارجع إلى الدرس	٢	١	٣	٤	٣	٥	١	٣	٢	١	٣	٣	٤	٥



# اختبارات عامة

## الاختبار الأول

أولاً: أجب عن السؤال الآتي:

١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١- أى الدوال التالية تحقق العلاقة  $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{3}$  ص

أ) ص  $\frac{1}{13} = (س + ١)^٤$  ب) ص = حاس

ج) ص = هـ س د) ص  $\frac{س}{١-س} =$

٢- إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل  $\frac{1}{\pi}$  سم/ث، فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل ..... سم/ث

أ)  $\frac{2}{\pi}$  ب) ٢ ج)  $\pi$  د)  $\pi^2$

٣- منحنى الدالة د حيث د (س) = س<sup>٣</sup> - س<sup>٢</sup> + ٢ محدب لأعلى عندما س  $\in$

أ)  $[-\infty, ٠]$  ب)  $[-١, \infty]$  ج)  $[١, ٣]$  د)  $[١, \infty]$

٤-  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (حاس + حتاس) ، ي س$  يساوى

أ) ٤ ب) ٢ ج) صفر د)  $\pi$

٥- إذا كانت د دالة متصلة على  $[٣, ٨]$  د (س) = س<sup>٣</sup> - س<sup>٢</sup> + ٢، فإن  $\int_{٣}^٨ د(س) ي س$

يساوى  
أ) صفر ب) ١ ج) ٣ د) ٥

٦- مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص =  $\sqrt{١٦-س^٢}$  ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى

أ)  $\pi ١٦$  ب)  $\pi ١٢$  ج)  $\pi ٨$  د)  $\pi ٤$

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط ممايأتى :

٢) أ) أوجد:  $\int_{١}^٢ حاس حتاس س ي س$

ب) إذا كان هـ س ص - س<sup>٢</sup> + ص<sup>٣</sup> = ٠، أوجد  $\frac{ص}{س}$  عند س = ٠

٣) أ) أوجد معادلة المماس للمنحنى س<sup>٣</sup> - س<sup>٢</sup> + ٣ = ٠ عند النقطة (-١، ٤)

ب) مثلث قائم الزاوية، فى لحظة ما كان طولاً ضلعى القائمة ٦ سم، ٣٠ سم، فإذا كان طول الضلع الأول

يتزايد بمعدل  $\frac{1}{٣}$  سم/د، وطول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/د أوجد:

١ - معدل التزايد فى مساحة المثلث بعد ٣ دقائق ٢ - الزمن الذى بعده يتوقف تزايد مساحة المثلث

٤) أ) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = س<sup>٢</sup> + ٢ حاس، ٠ < س <  $\pi ٢$

ب) رسم مستطيل بحيث تقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص = س<sup>٢</sup> - ١٢ والرأسان الآخران على

المنحنى ص = ١٢ - س<sup>٢</sup> احسب أكبر مساحة لهذا المستطيل.



٥ أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين  $\frac{4}{s} = v$  ،  $v = (s-3)^2$  دورة كاملة حول محور السينات

ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة  $d$  الذى يحقق الخواص الآتية:

د (١) = د (٥) = ٠ ، د (٢) = ٣ - د (س) > لكل س  $2 \neq$  د (س) < ٠ لكل س  $2 <$

## الاختبار الثانى

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١- معادلة المماس لمنحنى الدالة  $d$  حيث  $d = s^2 + 1$  عند النقطة  $(\frac{1}{4}, 1)$  هي:

أ)  $2 = s + 1$  ب)  $2 = s + 2$  ج)  $3 = 2 - s$  د)  $2 = 3 + s + 1$

٢- إذا كان  $v = 4 = s^3 + 4$  ،  $s = 3 - 2$  فإن معدل تغير  $v$  بالنسبة إلى  $s$  يساوى:

أ) ٢ ب) ٢ ج)  $\frac{1}{2}$  د) ٤

٣- أكبر قيمة للمقدار  $8 - s$  حيث  $s \in \mathbb{R}$  هي

أ) ٨ ب) ١٦ ج) ٣٢ د) ٦٤

٤- إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة  $d$  عند أى نقطة عليه يساوى  $\frac{1}{s-3}$  وكان المنحنى يمر بالنقطة  $(3, 0)$  فإن  $d = (2 + s^2)$  تساوى

أ) ٢ ب) ٣ ج)  $\frac{1}{2}$  د)  $\frac{1}{3}$

٥- إذا كانت دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  ،  $\frac{1}{s} = d$  (س) و  $s = 9 = \frac{1}{d}$  (س) فإن  $\frac{1}{s} = d$  (س) و  $s = 9 = \frac{1}{d}$  (س) تساوى:

أ) ٢ ب) ٨ ج) ١٦ د) ٦٣

٦- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $v = \sqrt{s+1}$  والمستقيمات  $v = 0$  ،  $v = 1$  ،  $s = 1$  يساوى

أ)  $\pi$  ب)  $\frac{\pi 3}{2}$  ج)  $\pi 2$  د)  $\frac{\pi 5}{2}$

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

٢ أوجد

أ)  $\frac{1}{s} = (2 - s)^3$  و  $s = 1$  ،  $\frac{1}{s} = s^2 - s$

ب) أوجد معدل تغير  $\sqrt{s+16}$  بالنسبة إلى  $\frac{s}{3}$  عند  $s = 3$



٣ أ إذا كان  $s$  حتماً  $+s$  حتماً  $= 1$  فأوجد  $\frac{s}{s}$

ب أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة  $d$  في الفترة  $[-1, 1]$  حيث  $d(s) = s^2 + 6s + 5$

٤ أ إذا كانت  $d(s) = \begin{cases} s^2 + s^2 & \text{عندما } s > 0 \\ s^2 - s^2 & \text{عندما } s \leq 0 \end{cases}$  أوجد:

١ - القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة  $d$   $-2$   $s^2$   $d(s)$

ب يتزايد حجم مكعب بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله بمعدل  $27 \text{ سم}^3/\text{د}$ ، أوجد معدل الزيادة في مساحة أوجهه عند اللحظة التي يكون فيها طول حرفه  $3 \text{ سم}$ .

٥ أ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين  $s = s^2$ ،  $s = 6 - s^2$  بالوحدات المربعة

ب إذا كان للدالة  $d$  حيث  $d(s) = s^3 + s^2 + s + 2$  فأوجد قيمتي الثابتين  $a$ ،  $b$  ثم ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة.

### الاختبار الثالث

أولاً: أجب عن السؤال الآتي:

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١ - ميل المماس لمنحنى الدائرة  $s^2 + s^2 = 25$  عند  $s = 3$  يساوي

أ  $-\frac{4}{3}$  ب  $-\frac{3}{4}$  ج  $\frac{5}{12}$  د  $\frac{4}{3}$

٢ - إذا كان  $d(s) = \frac{s}{s-3}$ ، فإن  $d(3)$  يساوي

أ  $36$  ب  $12$  ج  $6$  د  $4$

٣ - إذا كانت  $\frac{ds}{dt} = 2s$ ،  $s = 2$  عند  $s = \frac{\pi}{4}$ ، فإن  $s$  تساوي

أ  $-(2 + \text{ظتنا } s)$  ب  $-(3 + \text{ظتنا } s)$  ج  $-2 - \text{ظتنا } s$  د  $-3 - \text{ظتنا } s$

٤ - إذا كان  $s^2 = 7$ ،  $s^2 = 2$ ، فإن  $s^4$   $d(s) = 3 - s$   $s = 5$   $s$  يساوي:

أ  $18$  ب  $8$  ج  $10$  د  $14$

٥ - مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات  $s = 2$ ،  $s = 3$ ،  $s = 1$ ،  $s = 2$  تساوي

أ  $2$  ب  $3$  ج  $\frac{9}{2}$  د  $6$

٦ - حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين  $s = \theta$ ،  $s = \theta$  و  $s = \theta$  والمستقيمين  $s = \frac{\pi}{6}$ ،  $s = \frac{\pi}{3}$

دورة كاملة حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة يساوي:

أ  $\frac{\pi}{6}$  ب  $\frac{\pi}{3}$  ج  $\frac{\pi^2}{5}$  د  $\pi^2$

ثانياً : أجب عن ثلاثة اسئلة فقط ممايأتى :

- ٢) أ) أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س حيث: ص = س<sup>٢</sup> لو هـ س  
ب) إذا كانت د (س) =  $\sqrt[2]{(س-٤)}$  فأوجد فترات التحدب إلى أعلى وإلى أسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة د

٣) أوجد

- أ) ١- ل س (س-٥)<sup>٣</sup> و س ٢- ل س هـ س<sup>٢</sup> و س  
ب) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د (س) = س<sup>٤</sup> - س<sup>٣</sup> على الفترة [٠، ٤]  
٤) أ) إذا كان حجم الجسم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س<sup>٣</sup> والمستقيمين س = ٠، ص = ١ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك اسطوانى الشكل طوله ٤٢ وحدة فما طول نصف قطر السلك.  
ب) يتناقص الضلعان المتساويان فى مثلث متساوى الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ل سم بمعدل ٣ سم/د، ما هو معدل تناقص المساحة عندما يصبح المثلث مثلثاً متساوى الأضلاع

- ٥) أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين س - ص = ٠، ص = س<sup>٤</sup> - س<sup>٢</sup>  
ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص التالية:  
١- د (٠) = ٣  
٢- د (٢) = (٢) / د (٢-) = ٠  
٣- د (س) < ٠ عندما ٢ > س  
٤- د (س) > ٠ عندما س < ٠، د (س) < ٠ عندما س > ٠.

## الاختبار الرابع

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

١) اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

- ١- إذا كان ص =  $\frac{س^٣ - ٥}{س - ٢}$  فإن عند س = ١،  $\frac{س^٣}{س}$  يساوى:  
أ) ١٢- ب) ٦- ج) ٦ د) ١٢  
٢- ل س ط س و س يساوى:  
أ)  $\frac{١}{٤}$  ق س + ث ب)  $\frac{١}{٣}$  ق س + ث  
ج)  $\frac{١}{٣}$  ط س + ث د)  $\frac{١}{٣}$  ط س + ث  
٣- العمودى للدائرة س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> = ١٢ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة  
أ) (٣، ٢) ب) (١، ١) ج) (٠، ٠) د) (٢، -٢)

٤- منحنى الدالة د حيث د (س) = (س - ٢) هـ س يكون محدباً لأسفل على الفترة:

- أ [١]  $-\infty, \infty$  [ب]  $[-1, 2]$  [ج]  $[0, 2]$  [د]  $[-\infty, 2]$

٥-  $\sqrt[3]{s-4}$  س | س يساوى

- أ ٢٧ [ب] ٢٠ [ج] ٢٠ [د] ٢٧

٦- عند دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $s = \frac{1}{\sqrt{v}}$ ،  $1 \geq v \geq 4$  ومحور الصادات، دورة كاملة حول

محور الصادات فإن حجم الجسم الناشئ مقدراً بالوحدات المكعبة يساوى:

- أ  $\frac{2}{3}\pi$  [ب]  $\frac{2}{3}\pi$  [ج]  $2\pi$  [د]  $\frac{2}{3}\pi$

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط ممايتى:

٢ أوجد:  $\sqrt[3]{s-4}$  س | س يساوى  $\frac{1-s}{s+3}$  س

ب إذا كان حاص + حتا س = ٠ فأثبت أن:  $\frac{v^2}{s} - \left(\frac{v}{s}\right)^2$  ظا ص = ٤ حتا س قاص

٣ أ إذا كان  $\sqrt[3]{s-4}$  د (س) س = ٧،  $\sqrt[3]{s-4}$  س (س) = ٣ إحسب قيمة

$\sqrt[3]{s-4}$  [د (س) + ٢ س (س) - ٤] س

ب إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) =  $s^3 + s^2 + s + 1$  له قيمة عظمى محلية عند (٢، ٤) وله

نقطة إنقلاب عند (١، ٢) أوجد معادلة المنحنى

٤ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى  $\sqrt{s} + \sqrt{v} = 1$  والمستقيمين س = ٠، ص = ٠

ب ارسم منحنى الدالة المتصلة د الذى يحقق الخواص التالية

د (٤) = ٢ د (٣) = ٤، د (٢) = ٠

د (س) > ٠ عندما س < ٤ أو س > ٢،

د (س) < ٠ عندما س < ٣، د (س) > ٠ عندما س > ٣

٥ أ أثبت أن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين  $v = \frac{4}{s}$ ، ص = ٥ - س دورة

واحدة حول محور السينات يساوى  $\pi^9$  من الوحدات المكعبة

ب إذا كانت ح مساحة الجزء المحصور بين دائرتين متحدى المركز طولاً نصفاً قطريهما نق<sub>١</sub>، نق<sub>٢</sub>

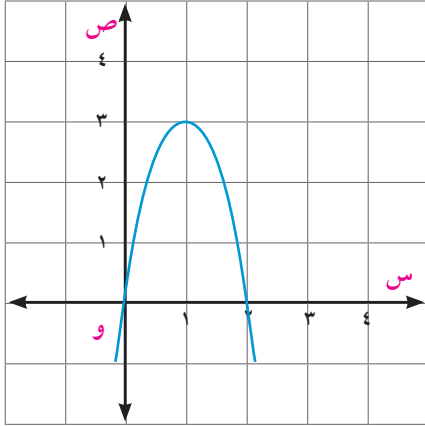
حيث نق<sub>٢</sub> < نق<sub>١</sub>، أوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن فى اللحظة التى يكون فيها نق<sub>٢</sub> = ١٠ سم،

نق<sub>١</sub> = ٦ سم، إذا علم أن عند هذه اللحظة نق<sub>١</sub> يتزايد بمعدل ٣ سم/ث، نق<sub>٢</sub> يتناقص بمعدل ٢ سم/ث.

## الاختبار الخامس

أولاً: أجب عن السؤال الآتي:

١) يوضح الشكل المقابل منحنى د (س) للدالة د حيث د (س) =  $s^3 + s^2 + 1$ ، ب ثابتان أكمل:



- أ) الدالة د متناقصة لكل س  $\Rightarrow$  .....  
 ب) لمنحنى د نقط حرجة عند س  $\Rightarrow$  .....  
 ج) منحنى د محدب لأعلى على الفترة .....  
 د) توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = .....  
 هـ) د (١) = .....  
 و) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د، والمستقيمين  $s = 2$ ،  $s = 0$  بالوحدات المربعة يساوي: .....

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتي:

٢) أوجد:

أ)  $\lim_{s \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{s^5}{1-s^3} \right)$   
 ب) للدالة د حيث د (س) =  $s^3 - 6s^2 + 9s - 1$

١- عين فترات التزايد والتناقص للدالة د ٢- أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة  $[2, 0]$

٣) أ) إذا كان د (س) =  $s^4 + 4s^3 - 3s^2$  أوجد معادلة العمودي لمنحنى الدالة د عند نقطة تقع على المنحنى وإحداثياتها السيني يساوي  $\frac{\pi}{4}$

ب) خزان فارغ سعة ١٠ أمتار مكعبه يصب فيه الماء تدريجياً بمعدل  $(2n + 3)$  متر مكعب / دقيقة حيث ن الزمن بالدقائق، أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

٤) أوجد:  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1-s^2}{1+s^2} \right)^{s^2}$

ب) يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم<sup>٢</sup> من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى والسفلى ١٠ سم، وكل من الهامشين الجانبيين ٥ سم، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن

٥) أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $s = 4 - s^2$  والجزأين الموجبين من محوري الاحداثيات دوره كاملة حول محور السينات.

ب) إذا كان د (س) =  $s^3 + s^2 + s + 4$  حيث أ، ب ثابتان

أوجد قيمتى أ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند  $s = 2$  ونقطة إنقلاب عند  $s = 1$  ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د

## الاختبار السادس

أولاً: أجب عن السؤال الآتي:

١) في كل من العبارات التالية اختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة والحرف ب إذا كانت العبارة خطأ.

- ١ - القيمة العظمى المحلية للدالة أكبر من القيمة الصغرى المحلية لها (أ) (ب)
- ٢ - معدل تغير  $\sqrt{3+2x}$  بالنسبة إلى  $x$  هو:  $\frac{n}{1+n}$  (أ) (ب)
- ٣ - إذا كان  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$  فإن:  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{y}}$  (أ) (ب)
- ٤ -  $\sqrt[4]{\frac{4-s}{(2-s)^2}} = s$  + ث (أ) (ب)
- ٥ - إذا كانت  $v = s$  لو  $s - s$  فإن:  $\frac{v}{s} = \frac{v}{s}$  (أ) (ب)
- ٦ - إذا كانت (أ، د) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة د فإن: د(أ) = صفر (أ) (ب)

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتي:

٢) أوجد :

- أ)  $\sqrt[4]{\frac{4-s}{(2-s)^2}} = s$  ،  $\sqrt[4]{\frac{4-s}{(2-s)^2}} = s$  (أ) (ب)
- ب) إذا كانت  $v = s$  لو  $s - s$  أثبت أن:  $\frac{v}{s} = \frac{v}{s}$  (أ) (ب)

٣) أوجد: أظنا  $s$  قتا  $s^3$  و  $s$

- ب) إذا كانت  $f$  بعد النقطة (١، ٠) عن النقطة (س، ص) الواقعة على المنحنى  $v = \sqrt{s}$  فأوجد إحداثي النقطة (س، ص) التي تكون عندها  $f$  أصغر ما يمكن.

٤) أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة  $d$  حيث  $d(s) = |s|$  (س-٤) في الفترة  $[-1, 3]$

- ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى  $v = d(s)$  عند أي نقطة عليه يساوي  $s^2 + 2$  ب  $s$  وكان  $d(0) = 0$  ،  $d(2) = -3$  ، أوجد قيمة الثابت  $b$  ثم ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة  $d$ .

٥) أ) أوجد معدل تغير  $لو (9+s^3)$  بالنسبة إلى  $s^2 + 3$  عند  $s = 1$

- ب) إذا كانت  $أ (3, 0)$  ،  $ب (1, 4)$  ،  $ج (2, 0)$  ، أوجد باستخدام التكامل :

أولاً: مساحة سطح المثلث  $أ ب ج$ .

ثانياً: حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث  $أ و ج$  دورة كاملة حول محور الصادات.



## الاختبار السابع

**أولاً: أجب عن السؤال الآتي :**

❶ في كل من العبارات التالية اختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة والحرف ب إذا كانت العبارة خطأ.

١ - إذا كانت  $v^2 = 3s^2 - 7$  فإن:  $\frac{v}{s^3} = \frac{v}{s}$  (أ) (ب)

٢- للدالة د: د(س) = س<sup>٣</sup> - س<sup>٢</sup> + ١ نقطة إنقلاب هي: (٠، ١)

$$3 - \frac{s}{s_s} = 3 \text{ جا } 3 \text{ س قتا } 2 \text{ (جتا } 3 \text{ س)} \quad (\text{ا}) \quad (\text{ب})$$

٤ - ١ (جتاس) ء جاس و س = - ١/٥ (١ + جتاس) + ٥ (ب) (أ)

۵۔  $\text{نہا} = \text{س} \left( \frac{0}{\infty} + 1 \right) \text{س} = \text{ہ}$  (ا) (ب)

٦-  $\left( \frac{s}{h} + \frac{h^2}{s} \right) \gamma_s = h^2 \text{ لو } |s| - \frac{s^2}{h} + \text{ث}$  (أ) (ب)

**ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتي:**

٢ أوجد :

ا) اس جا س ۲ س ،  $\sqrt[3]{2s^4 + s^2}$  س

ب) أوجد معادلة المماس للمنحنى  $V = \sqrt[3]{2 - x}$  (جتاس) عند النقطة التي تقع عليه وإحداثياتها السينية يساوى  $\frac{\pi}{6}$ .

٣ ا عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة د حيث

$$د(س) = (س - ١)^٤ + ٣$$

ب) متوازي مستطيلات من المعدن قاعدته علي شكل مربع ، فإذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل  $0,4$  / ث وتناقص الارتفاع بمعدل  $0,5$  سم / ث ، أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة  $6$  سم والارتفاع  $5$  سم.

٤ ا إذا كانت د(س) =  $\sqrt[3]{\frac{s}{s+1}}$

ب) ملعب على شكل مستطيل ينتهي ضلعان متقابلان منه بنصفى دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع. إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ متراً فأثبت أن مساحة سطح الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة وأوجد طول نصف قطرها.

٥ أ إذا كانت د(س) =  $s^3 - 3s + 3$  أوجد :

أولاً: القيم القصوى المطلقة للدالة  $D$  في الفترة  $[0, 2]$

ثانياً: مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة  $d$  والمستقيمات  $s=0$ ،  $s=2$ ،  $v=0$ .

ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $s = 2$  والمستقيمان  $s = 1$ ،  $s = 2$



## الاختبار الثامن

أولاً: أجب عن السؤال الآتى :

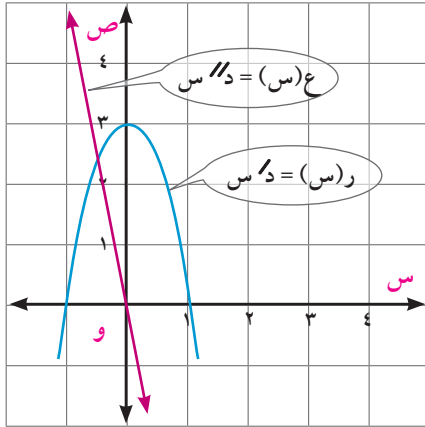
١ اكمل ما يأتى:

- أ إذا كان  $s^3 = 1$  فإن  $\left[ \frac{s}{s^3} \right] = \dots$
- ب  $\frac{s}{s^3} = [7 \text{ هـ قاس}] = \dots$
- ج للدالة  $d: (s) = s^3 - 3s - 1$  نقطة انقلاب هي:  $\dots$
- د إذا كانت  $d$  متصلة على الفترة  $[2, 7]$  فإن  $\int_2^7 d(s) ds + \int_7^2 d(s) ds = \dots$
- ه مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين  $s^2 = s$ ،  $s^4 = s$  تساوى  $\dots$  وحدة مربعة
- و إذا كانت  $s = 2$  لو  $\frac{s}{1} \neq 0$  فإن  $\left[ \frac{s^3}{s^4} \right]_{s=2} = \dots$

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى:

٢ أوجد:

- أ أوجد:  $\int \frac{(s+3)^2 - 27}{s} ds$  ،  $\int s^2 - s^3 ds$
- ب أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة  $d$  حيث  $d(s) = 2$  ظا  $s$  عند النقطة التى تقع على منحنى الدالة  $d$  وإحداثيها السينى يساوى  $\frac{\pi}{4}$



- ٣ أوجد  $\int |s-2| ds$
- ب يوضح الشكل المقابل منحنيا الدالتين  $r$ ،  $e$  حيث:
- $r(s) = d(s)$ ،  $e(s) = d(s)$ ،
- $d$  دالة كثيرة حدود فى المتغير  $s$ .
- ارسم الشكل العام لمنحنى  $d$  علماً بأنه يمر بالنقطتين  $(-1, 0)$ ،  $(1, 4)$

- ٤ أ عين القيم القصوى المطلقة للدالة  $d$  فى الفترة  $[0, 2]$  حيث  $d(s) = 3 - \sqrt{s-4}$
- ب قضيب طوله ٥ أمتار مثبت بمفصل فى الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسياً إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ متر/دقيقة أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار.
- ٥ أ رسم فى نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هى قطر نصف الدائرة ، عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته اكبر ما يمكن.

ب) إذا كانت م المنطقة المحددة بالمنحنى س ص =  $\epsilon + 2$  س<sup>٢</sup> والمستقيمات س = ١ ، س =  $\epsilon$  ، ص = ٠ أوجد :  
 أولاً: مساحة المنطقة م بالوحدات المربعة لأقرب وحدة .  
 ثانياً: حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات .

## الاختبار التاسع

أولاً: أجب عن السؤال الآتي:

١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١- إذا كان س =  $2\sqrt{2} + 7$  ، ص =  $\sqrt[3]{2}$  ، ن = ١ فإن:  $\frac{ك}{ص}$  يساوي :

- أ)  $\frac{3}{8}$       ب)  $\frac{3}{4}$       ج)  $\frac{2}{3}$       د)  $\frac{6}{5}$

٢- منحنى الدالة د محدباً لأسفل على ع إذا كان د(س) يساوي :

- أ)  $2 - س^2$       ب)  $2 + س^3$       ج)  $2 - س^4$       د)  $2 + س^4$

٣- إذا كان لمنحنى الدالة د : د(س) =  $س^3 + ك س^2 + \epsilon + ٤$  ،  $\exists$  ع نقطة انقلاب عند س = ٢ ، فإن ك تساوي :

- أ) -٦      ب) -٣      ج) -٦      د) -٩

٤- إذا كانت د دالة متصلة على ع ،  $ل_١ د(س) = ٧$  ،  $ل_٢ د(س) = ١١$  فإن :  $ل_١ د(س) و ل_٢ د(س)$  تساوي:

- أ) -٤      ب) ١٨      ج) -١٨      د) ٧٧

٥-  $ل_١ د(س) = ١$  |  $س = ١$  |  $س$  يساوي:

- أ) -٦      ب) ٠      ج) ٤      د) ٨

٦- مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص =  $س^3$  والمستقيمين ص = ٠ ، س = ٢ تساوي :

- أ) ١      ب) ٢      ج) ٤      د) ٨

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتي:

٢) أ) أوجد:  $ل_١ \frac{س^3}{١-س^2}$  ،  $ل_٢ ٩ س^٢ هـ ٣ س و س$

ب) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها مماس المنحنى ص =  $س^3$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ٨ لأقرب دقيقة .

٣) أ) إذا كان جاس = س ص أثبت أن :  $س^٢ (ص + س'') + ٢ جتاس = ٢ ص$

ب) إذا كان للمنحنى ص =  $س^٢ + ٣ س^٣ + ٤ س + ٥$  مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة (١، ٢) ، أوجد معادلة المماس الآخر.

٤ أ يرتفع بالون رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨ متر / دقيقة، فإذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض يبعد ٢٠٠ متراً عن موقع إطلاق البالون ، أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد له عندما يكون البالون على ارتفاع ٢٠٠ متراً.

ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س، ص) على المنحنى هو ٣ (س - ١) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحنى الدالة د ونقط الانقلاب إن وجدت، علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (٢، -١) ، ثم ارسم شكلاً عاماً لهذا المنحنى.

٥ المستقيم  $\overleftrightarrow{AB}$  يقطع منحنى الدالة د في النقطة ج (س، ص) حيث  $س < ٠$  ، أ (٢، ٠) ، ب (٦، ٤) ، د (س) =  $\frac{٩}{س}$  ، أوجد :

أ معادلة المستقيم  $\overleftrightarrow{AB}$

ب إحداثيي النقطة ج

ج معادلة العمودي على منحنى د عند النقطة ج، وأثبت أنه يمر بنقطة الأصل و

د حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالعمودي  $\overleftrightarrow{AB}$  ومنحنى الدالة د والمستقيم س = ٦ دورة كاملة حول محور السينات.

## الاختبار العاشر

أولاً: أجب عن السؤال الآتي:

١ أكمل ما يأتي :

أ نهـ  $\lim_{س \rightarrow \infty} \left( \frac{١}{س} + ١ \right) = ٣ + \dots$

ب  $\lim_{س \rightarrow ٥} \left( \frac{٥}{س} - ٢ \right) = \dots$

ج إذا كان للدالة د : د(س) =  $س^٣ + ٩س^٢$  نقطة انقلاب عند س = -١ فإن ك = .....

د  $\lim_{س \rightarrow ٥} (٤س^٣ - ٦س^٢ + ٥س) = \dots$

ه إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [١، ٤] فإن  $\lim_{س \rightarrow ٤} د(س) = ٤ + \lim_{س \rightarrow ٤} د(س) = \dots$

و مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص =  $س^٤ + ١$  ، ص =  $٢س^٢$  تساوي ..... وحدة مربعة

ثانياً: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتي:

٢ أ أوجد:  $\lim_{س \rightarrow ١} (٣س + ١)$  ،  $\lim_{س \rightarrow ١} (٣س - ١)$  ،  $\lim_{س \rightarrow ١} (٣س - ١)^٢$

ب إذا كانت المعادلتان البارامتريتان للدالة د حيث ص = د(س) هما:

س =  $٢ن^٢ + ٣$  ، ص = ن أوجد عند ن = ١ كل من :

ثانياً:  $\frac{د}{ص}$

أولاً: معادلة مماس لمنحنى الدالة د



ب

۲. [۳ د (س) - ۶ س] ۵ س



ب

٦ سم. وضع داخله ساق معدنية طولها ١٦ سم، فإذا كان معدل انزلاق الساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم/ث، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها.



حرجة عند س = ١ وللدالة قيمة صغرى محلية تساوي ٤.

أولاً: أوجد معادلة العمودي للمنحني عند  $s = 1$

ثانياً: ارسـم شكلاً عامّاً للمنحنى موضّحاً القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب إن وجدت

ب

س = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات.







ج  $\frac{ص}{ك} = 2 + 10\pi$  س جا  $(\pi)$  س<sup>٢</sup>

د  $\frac{ص}{ك} = 2\pi$  جا  $(\pi)$  س<sup>٢</sup> + ١

هـ  $\frac{ص}{ك} = \text{صفر}$

و  $\frac{ص}{ك} = 2$  س<sup>٢</sup> (٢ ق٢ س - ١)

٧  $\frac{ب س}{\theta} = 2 - 3\sqrt{3}$  س

ب  $\frac{ص}{ك} = \frac{٥٥-ص}{١٨ص}$

٨ ا  $\frac{ص}{ك} = \frac{س}{٣ص}$

د  $\frac{ص}{ك} = \frac{٣-ص}{٢+ص}$

ج  $\frac{ص}{ك} = \frac{س-ص}{٢ص-ص}$

هـ  $\frac{ص}{ك} = \frac{ص+جتا س}{س}$

و  $\frac{ص}{ك} = \text{ظتا س ظتا ص}$

٩ ا  $\frac{ص}{ك} = \frac{١}{٥} (٢+س) (١+٢س)$

ب  $\frac{ص}{ك} = \frac{٦-}{٢٥}$

١١ ا  $\frac{ص}{ك} = 9ص + 24 = 0$  س  $3\sqrt{3}$

$0 = 12 - ص + 3\sqrt{3}$

ب  $0 = 2س - ص$

$0 = 5\pi + 8ص - 5\pi$

$0 = 3س - ص$

١٢ ا  $0 = 10ص + 3س$

$0 = 3س - ص$

ب  $0 = 1 + 2ص + 3س$

١٣ ١ وحدة مربعة

١٨ ١- وحدة / ث

١٦ ٩٩ سم / ث

١٩ ٨ سم<sup>٢</sup> / ث

٢٠  $\frac{٣}{٤}$  ك وحدة / ث

٢١ ١٠ سم

٢٢  $\frac{٥}{٣}$  متر / د

٢٤  $\frac{١}{\pi\sqrt{2}}$  م / د

٢٥ ١٤,٠٠ / د

٢٦ ١- / ث

٢٧  $\frac{٣}{١٤}$  وحدة مربعة / ث

ب  $ص + 1 = 3 - \sqrt{3} (\frac{\pi}{3} - س)$

ص + 1 =  $\frac{1}{3\sqrt{3}} (\frac{\pi}{3} - س)$

٢ ا  $0 = 2س - 3ص - 26$  ب  $0 = 2 + ص + س$

ج  $0 = 3 + ص + س$  د  $0 = 1 - ص + س$

د  $0 = ص$  ،  $س = \frac{\pi}{4}$

٤ ا  $0 = 2س - 3ص - 4$  ب  $0 = 3 + ص + س$

ب  $0 = 3 - ص - 3\sqrt{3} (\frac{\pi}{3} - س)$

٥ ك = 4 ص = 2 + 0

٦ ٨, ٥ وحدة مربعة

٧ عند النقطة أ (١, ٠) : س - ص = 1 + 0

س + ص = 1 - 0

عند النقطة ب (١, ٠) : س + ص = 1 + 0

س - ص = 1 - 0

#### تمارين (١ - ٥)

١ د ٢ ب ٣ ا ٤ ب

٥  $\frac{ص}{ك} = ٨, ٠$  وحدة / ث

٦  $\frac{ص}{ك} = \frac{١٦٠\pi}{٢}$  سم / ث

٧  $\frac{ص}{ك} = \frac{3 - \sqrt{3}}{٢}$  سم / ث

٨  $\frac{ص}{ك} = ٥٠$  ث جم / سم<sup>٢</sup>

٩  $\frac{ص}{ك} = \frac{١ - \pi}{٢٠}$  سم / ث  $\therefore \frac{ص}{ك} = \frac{٤ - \pi}{٢}$  سم / ث

١٠  $3 - \frac{\theta}{ك} = ٠, ١$  د  $\therefore \frac{\theta}{ك} = ٠, ١$  د

١١ ٤٨ متر / د ١٢ ٦٠ سم<sup>٢</sup> / ساعة

#### إجابات التمارين العامة

١ د ٢ ج ٣ ع ٤ ب

٥ ب

٦ ا  $\frac{ص}{ك} = 1 - 2$  ق٢ س<sup>٢</sup>

ب  $\frac{ص}{ك} = \frac{١}{٣\sqrt{3}} + ٥$  ق٢ س<sup>٢</sup> ظا هـ



$$\textcircled{25} \quad 4 \text{ لو } | \text{س} | + \text{هـ} \text{س} + \text{ث}$$

$$\textcircled{26} \quad 4 \text{ لو } | \text{لو}^3 \text{س} | + \text{ث} \quad \frac{1}{3} (1 + \text{لو}^3 \text{س}) + \text{ث}$$

$$\textcircled{28} \quad \text{د} (3) \simeq 11, 4$$

### إجابات التمارين العامة

$$\textcircled{1} \quad \text{د} \quad \textcircled{2} \quad \text{أ} \quad \textcircled{3} \quad \text{ج} \quad \textcircled{4} \quad \text{د}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{م.ح} = \{103\} \quad \textcircled{6} \quad \text{م.ح} = \{25\}$$

$$\textcircled{7} \quad \text{م.ح} = \{0, 399\} \quad \textcircled{8} \quad \text{م.ح} = \{1, 91\}$$

$$\textcircled{9} \quad \text{م.ح} = \{2, 197\} \quad \textcircled{10} \quad \text{م.ح} = \{1, 654\}$$

$$\textcircled{11} \quad \text{هـ}^6 \quad \textcircled{12} \quad \text{هـ}^1 \quad \textcircled{13} \quad \text{هـ}^2 \quad \textcircled{14} \quad \text{هـ}^7 \text{س}$$

$$\textcircled{15} \quad 6 \text{س هـ}^3 \text{س}^2 + 1 \quad \textcircled{16} \quad 2 \text{س هـ}^3$$

$$\textcircled{17} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3 + \text{س}^2} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س}} \quad \textcircled{18} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س}}$$

$$\textcircled{19} \quad \text{هـ}^{\text{س}} \left[ \frac{\text{س}^2}{1 + \text{س}} + \text{لو}^2 (1 + \text{س}) \right]$$

$$\textcircled{20} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2 (1 + \text{س})} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 (1 + \text{س})}$$

$$\textcircled{21} \quad 3 \text{س}^2$$

$$\textcircled{22} \quad \text{صفر}$$

$$\textcircled{23} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3} = \frac{3}{4 \text{هـ}^3}$$

$$\textcircled{24} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3} = \frac{4}{3 \text{ن}^3}$$

$$\textcircled{25} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3} = \frac{2}{3 \text{س}}$$

$$\textcircled{26} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3} = \frac{6 + 8 \text{هـ}^2 \text{س}}{3 \text{س}}$$

$$\textcircled{27} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3} = \frac{1}{10 \text{لو}^2 \text{هـ}}$$

$$\textcircled{28} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2} = \frac{2 \text{س}^2 + 1 + (\text{س} + 1) \text{لو}^2}{\text{هـ}}$$

$$\textcircled{29} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2} = \frac{2 \text{س}^2 + 3 \text{س} + 2 \text{س} \text{لو}^2}{\text{س}}$$

$$\textcircled{30} \quad - [\text{جاس لو}^3 (1 - \text{س}) + \frac{3 \text{جاس}}{\text{س}^3 - 1}] (1 - \text{س}) \text{جاس}$$

$$\textcircled{31} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2} = \frac{1}{\text{س}} (\text{لو}^3 \text{س} + \text{س}^2 \text{هـ})$$

$$\textcircled{32} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{\text{هـ}}} = \text{س} \quad \textcircled{33} \quad \sqrt[3]{\text{هـ}} = \text{س}$$

$$\textcircled{34} \quad \sqrt[3]{\text{هـ}} = \text{س} \quad \textcircled{35} \quad \sqrt[3]{\text{هـ}} = \text{س}$$

$$\textcircled{38} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2} = \frac{1 - \text{هـ}}{\text{هـ}}$$

$$\textcircled{39} \quad 2 \text{لو}^3 \text{س} + \text{ث}$$

$$\textcircled{40} \quad 3 \text{لو}^3 \text{س} - 2 \text{هـ}^2 \text{س} + \text{ث}$$

$$\textcircled{41} \quad \text{هـ}^2 \text{لو}^3 \text{س} + \frac{1}{3} \text{س}^2 \text{لو}^3 + \text{ث}$$

$$\textcircled{42} \quad \frac{1}{4} \text{س}^2 - \frac{2}{3} \text{هـ}^2 \text{س} + \text{ث}$$

$$\textcircled{43} \quad \frac{1}{4} \text{ظتنا}^2 \text{س} - \text{لو}^3 \text{جاس} + \text{ث}$$

$$\textcircled{44} \quad 7, 456 \simeq \text{وحدة طول}$$

$$\textcircled{45} \quad 3 \text{س} - \text{ص} = 1, 02 \quad 3 \text{س} + \text{ص} = 10, 44 \quad 0 = 10, 44$$

$$\textcircled{46} \quad \text{ص} = 8 \text{لو}^3 \text{س} - 8 \text{لو}^4 \text{س} + 2$$

$$\textcircled{47} \quad \text{س} \in \{1, 65, 1, 65\}$$

### اجابات الاختبار التراكمى

$$\textcircled{1} \quad \text{ج} \quad \textcircled{2} \quad \text{د} \quad \textcircled{3} \quad \text{ب} \quad \textcircled{4} \quad \text{ج}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{أ} \quad \text{ص} = 6 \text{س}^2 (1 + \text{س})$$

$$\text{ب} \quad \text{ص} = \frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{4} \text{هـ}^2 \text{س}$$

$$\text{ج} \quad \text{ص} = 2 (\text{س} - \frac{1}{\text{س}})$$

$$\textcircled{6} \quad \text{أ} \quad \text{س}^2 + 3 \text{لو}^3 \text{س} + \text{ث}$$

$$\text{ب} \quad 2 \text{هـ}^2 \text{س}^2 + \text{ث}$$

$$\text{ج} \quad \frac{3}{4} \text{لو}^3 \text{س} + \text{ث}$$

$$\textcircled{7} \quad \text{د} (\text{س}) = 7 (\text{س} - 1 - \text{لو}^2) - 2 \text{هـ}^2 \text{س}$$

### الوحدة الثالثة

#### تمارين (١-٣)

$$\textcircled{1} \quad \text{د متزايدة على } [2, \infty) \quad \text{أ متزايدة على } [2, \infty)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{د متناقصة على } [3, \infty) \quad \text{أ متناقصة على } [3, \infty)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{د متزايدة على } [0, \infty) \quad \text{أ متناقصة على } [0, \infty)$$

$$\text{د متزايدة على } [4, \infty)$$



٧ د(١-) = ٢ عظمى محلية، د(١) = ٢- صغرى محلية

٨ د(٠) = ٣ عظمى محلية

٩ د(٢-) = ٠ قيمة صغرى محلية

١٠ د(٢) = ٣ قيمة صغرى محلية

١١ د(١-) = ٣- قيمة عظمى محلية

د(٣) = ٥ قيمة صغرى محلية

١٢ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية

١٣ د(٠) = ٤ قيمة عظمى محلية

١٤ د(٢) = ٢ هـ قيمة عظمى محلية

١٥ د(٠) = ٢ قيمة صغرى محلية

١٦ د(١) = ١ قيمة صغرى محلية

١٧ د(٢) = ٨ لو -٤ ≈ ١,٥٥ قيمة عظمى محلية

١٨ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣،

قيمة صغرى مطلقة = ١-

١٩ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢،

قيمة صغرى مطلقة = ١

٢٠ للدالة قيمة عظمى مطلقة =  $\sqrt{2}$ ،

قيمة صغرى مطلقة =  $-\sqrt{2}$

٢١ للدالة قيمة عظمى مطلقة  $\approx ٠,٣٧$ ،

وقيمة صغرى مطلقة = ٠

٢٢ | ١ = أ ، ب = ٩ ، ج = ١٥ ، د = ٥

### تمارين ٣-٣

١ أ [٥، ٤-] ب {٢، ٢-} ج [٥، ٠] د [٥، ٤-]

٢ هـ (٠، ٠) و ٢ ز ٨

٢ المنحنى محدب لأعلى لكل س  $\exists$  ع

لا توجد نقط انقلاب

٣ التحذب: لأعلى على [١،  $\infty$ )

لا أسفل على [١،  $\infty$ ) ، (١، ١) نقطة إنقلاب

٤ التحذب: لأعلى على [٢،  $\infty$ ) ،

لا أسفل على [٢،  $\infty$ ) ، (٢، ٤٦) نقطة إنقلاب.

٤ د متناقصة على  $[-\infty، -\sqrt{3}]$

د متزايدة على  $[-\sqrt{3}، \sqrt{3}]$

د متناقصة على  $[\sqrt{3}، \infty]$

٥ د متناقصة على  $[-\infty، ١-]$

د متزايدة على  $[١-، \infty]$

٦ د متزايدة على  $[-\infty، ٢]$

د متناقصة على  $[٢، \infty]$

٧ د متزايدة على  $[-\infty، ٠]$

د متزايدة على  $[٠، \infty]$

٨ د متزايدة على  $[-\infty، ٢-]$

متزايدة على  $[٢-، \infty]$

٩ د متزايدة على [١، ٢] ، متناقصة على [٢،  $\infty$ )

١٠ د متزايدة على  $[٠، \infty]$

١١ د متزايدة على  $[-\infty، ٠]$

د متناقصة على  $[٠، \infty]$

١٢ د متناقصة على  $[-\infty، \infty]$

١٣ د(س) متزايدة على الفترة  $[-\frac{\pi}{4}، ٠]$

١٤ د متناقصة على  $[-\frac{\pi}{4}، ٠]$

، متزايدة على  $[\frac{\pi}{4}، \frac{\pi}{2}]$

، متناقصة على  $[\frac{\pi}{2}، \pi]$

### تمارين ٢-٣

١ د(٠) = ٠ قيمة عظمى محلية

د(٢) = ٤- قيمة صغرى محلية

٢ د(١-) = ٢- قيمة عظمى محلية

د(١) = ٢ قيمة صغرى محلية

٣ د(٠) = ٠ قيمة عظمى محلية

د(١) = ١- قيمة صغرى محلية

٤ د(٢-) = ٦ عظمى محلية، د(٠) = ٢ صغرى محلية

٥ د(١-) = ١- صغرى محلية، د(٠) = ٠ عظمى محلية

د(١) = ١- صغرى محلية

٦ د(٢-) =  $(\frac{2-}{3\sqrt{3}})$  صغرى محلية

د(٢) =  $(\frac{2}{3\sqrt{3}})$  عظمى محلية

٢٥) نقط الانقلاب : (١، ٢) فقط

د(٢) = -٤ صغرى محلية نقط إضافية: (١، ٣)

٢٦) د(٠) = ٤ عظمى محلية و لا توجد نقط انقلاب  
نقط إضافية = (٥، ٥)

تمارين ٣-٤

١) ١٥، ١٥ ٢) ٣، ٢ ٣) (١)

٤) ٩٠٠ متر مربع. ٥) ٧، ٥ سم

٦) ٢٠، ٢٠، ٢٠ من السنتيمترات.

٧) ٢٠٠ سم، ٢٠٠ سم

٨) ٨٠٠٠٠ متر مربع ٩)  $\frac{٤}{٢} = ٢$

١٠)  $\frac{٤٤١٠٠}{\pi}$  متر مربع ١١) ٢٠٠، ٢٠٠، ٢٠٠ سم

١٢) أبعاد العلبة ٣، ٩، ١٨ من السنتيمترات

١٤) (٤، ٤)، (٤، -٤) ١٥)  $\frac{٦}{٥}$  وحدة طول

١٦) ٩٠° ١٧) ٢٠٠ أمبير

١٨) ٢٢٥٠ ١٩) س =  $\frac{١}{٣}$  سم

حل التمارين العامة

١) ج ٢) ب ٣) د ٤) أ ٥) د

٦) د متناقصة على -  $\infty$ ، ٣ ] متزايدة على [ ٣،  $\infty$  ]

٧) د متزايدة على -  $\infty$ ، ١ ]،  $\frac{١}{٣}$ ،  $\infty$  ]

متناقصة على [ ١، ٠ ]

٨) د متزايدة على -  $\infty$ ،  $\infty$  ]

٩) د متزايدة على -  $\infty$ ، ٢ ] متناقصة على [ ٢،  $\infty$  ]

١٠) د متزايدة على -  $\infty$ ، ١ ]،  $\frac{٤}{٣}$ ،  $\infty$  ]

متناقصة على [ ١، ٠ ]

١١) د متناقصة على -  $\infty$ ، ٣ ] متزايدة على [ ٣،  $\infty$  ]

١٢) د متناقصة على -  $\infty$ ، ٠ ]، ٠،  $\infty$  ]

١٣) د(س) =  $\frac{س}{٣}$  د متزايدة على -  $\infty$ ، ٢ ]، ٢،  $\infty$  ]

١٤) د متزايدة على -  $\infty$ ، ١ ]، ١،  $\infty$  ]

١٥) تحذب لأسفل لكل س  $\exists$  ع

١٦) تحذب لأعلى على -  $\infty$ ، ١ ]

ولأسفل على [ ١،  $\infty$  ]، (١، ٢) نقطة انقلاب

١٧) تحذب لأعلى على -  $\infty$ ، ٢ ]

ولأسفل على [ ٢،  $\infty$  ]، (٢، -٧) نقطة انقلاب

١٨) تحذب لأعلى على -  $\infty$ ، ٠ ]،

تحذب لأسفل على [ ٠،  $\infty$  ]

نقط الانقلاب: (٠، ٧)

١٩) تحذب لاعلى على -  $\infty$ ، ٠ ]، ٣،  $\infty$  ]

ولاسفل على [ ٠، ٣ ]، نقط الانقلاب: (٠، ٨١)

٢٠) تحذب لأعلى على [ ٠، ٢ ] ولأسفل على -  $\infty$ ، ٢ ]،  $\infty$  ]

نقط الانقلاب: (٠، ٧)

٢١) د(٣) = ١٣ قيمة عظمى محلية

٢٢) د(٠) = ٧ قيمة عظمى محلية

د(١) = ٦ قيمة صغرى محلية.

٢٣) د( $\frac{٢}{٣}$ ) =  $\frac{٣٢}{٣٧}$  قيمة عظمى محلية

د(٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

٢٤) د(٢) = -٨ قيمة صغرى محلية

د(٠) = ٨ قيمة عظمى محلية

د(٢) = -٨ قيمة صغرى محلية

٢٥) د(٠) = ١ قيمة صغرى محلية.

٢٦) د غير متصلة عند س = ٢

د(١) = ٢ قيمة عظمى محلية

د(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية

٢٧) د(١) = - $\frac{١}{٣}$  قيمة صغرى محلية

د(٩) =  $\frac{١}{١٨}$  قيمة عظمى محلية.

٢٨) د(٢) = ٠ قيمة صغرى محلية.

٢٩) د(١، ٦) = ١ قيمة صغرى محلية

٣٠) للدالة قيمة صغرى مطلقة = -٩

وقيمة عظمى مطلقة = ١

٣١) القيمة الصغرى المطلقة = ٠

القيمة العظمى المطلقة = ٨١

٣٢) القيمة الصغرى المطلقة = ٢

القيمة العظمى المطلقة = ١٨



٢٥) نقط الانقلاب : (١، ٢) فقط

د(٢) = -٤ صغرى محلية نقط إضافية: (١، ٣)

٢٦) د(٠) = ٤ عظمى محلية و لا توجد نقط انقلاب  
نقط إضافية = (٥، ٥)

تمارين ٣-٤

١) ١٥، ١٥ ٢) ٣، ٢ ٣) (١)

٤) ٩٠٠ متر مربع. ٥) ٧، ٥ سم

٦) ٢٠، ٢٠، ٢٠ من السنتيمترات.

٧) ٣٦٠ سم، ٣٦٠ سم

٨) ٨٠٠٠٠ متر مربع ٩)  $2 = \frac{6}{\text{م}} = \frac{6}{\text{م}} = \frac{6}{\text{م}}$

١٠)  $\frac{44100}{\pi}$  متر مربع ١١) ٣٦١٥، ٣٦١٥ سم

١٢) أبعاد العلبة ٣، ٩، ١٨ من السنتيمترات

١٤) (٤، ٤)، (٤، -٤) ١٥)  $\frac{7}{\text{وحدة طول}}$

١٦) ٩٠° ١٧) ٣٦٢ أمبير

١٨) ٢٢٥٠ ١٩) س  $\frac{1}{3} = \text{سم}$

حل التمارين العامة

١) ج ٢) ب ٣) د ٤) أ ٥) د

٦) د متناقصة على -  $3, \infty$  ] متزايدة على  $3, \infty$  [

٧) د متزايدة على  $0, \infty$  [  $0, \frac{1}{4}$  ] متناقصة على  $0, \frac{1}{4}$  ]

٨) د متزايدة على  $0, \infty$  [  $0, \frac{1}{4}$  ] متناقصة على  $0, \frac{1}{4}$  ]

٩) د متزايدة على  $2, \infty$  [  $2, \infty$  ] متناقصة على  $2, \infty$  [  $2, \infty$  ]

١٠) د متزايدة على  $0, \infty$  [  $0, \frac{4}{3}$  ] متناقصة على  $0, \frac{4}{3}$  ]

١١) د متناقصة على  $3, \infty$  [  $3, \infty$  ] متزايدة على  $3, \infty$  [  $3, \infty$  ]

١٢) د متناقصة على  $0, \infty$  [  $0, \frac{4}{3}$  ] متناقصة على  $0, \frac{4}{3}$  ]

١٣) د(س) =  $\frac{س}{س} = 1$  د متزايدة على  $2, \infty$  [  $2, \infty$  ] متناقصة على  $2, \infty$  [  $2, \infty$  ]

١٤) د متزايدة على  $1, \infty$  [  $1, \infty$  ] متناقصة على  $1, \infty$  [  $1, \infty$  ]

١٥) تحذب لأسفل لكل س  $\exists$  ع

١٦) تحذب لأعلى على  $1, \infty$  [  $1, \infty$  ]

ولأسفل على  $1, \infty$  [  $1, \infty$  ]

نقطة انقلاب (١، ٢)

١٧) تحذب لأعلى على  $2, \infty$  [  $2, \infty$  ]

ولأسفل على  $2, \infty$  [  $2, \infty$  ]

١٨) تحذب لأعلى على  $0, \infty$  [  $0, \infty$  ]

تحذب لأسفل على  $0, \infty$  [  $0, \infty$  ]

نقط الانقلاب: (٧، ٠)

١٩) تحذب لأعلى على  $0, \infty$  [  $0, \infty$  ]

ولأسفل على  $0, \infty$  [  $0, \infty$  ]

٢٠) تحذب لأعلى على  $2, \infty$  [  $2, \infty$  ]

نقط الانقلاب: (٧، ٠)

٢١) د(٣) = ١٣ قيمة عظمى محلية

٢٢) د(٠) = ٧ قيمة عظمى محلية

د(١) = ٦ قيمة صغرى محلية.

٢٣) د( $\frac{2}{3}$ ) =  $\frac{22}{27}$  قيمة عظمى محلية

د(٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

٢٤) د(٢) = -٨ قيمة صغرى محلية

د(٠) = ٨ قيمة عظمى محلية

د(٢) = -٨ قيمة صغرى محلية

٢٥) د(٠) = ١ قيمة صغرى محلية.

٢٦) د غير متصلة عند س = ٢

د(١) = ٢ قيمة عظمى محلية

د(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية

٢٧) د(١) =  $\frac{1}{4}$  قيمة صغرى محلية

د(٩) =  $\frac{1}{18}$  قيمة عظمى محلية.

٢٨) د(٢) = ٠ قيمة صغرى محلية.

٢٩) د(١، ٦) = ١ قيمة صغرى محلية

٣٠) للدالة قيمة صغرى مطلقة = -٩

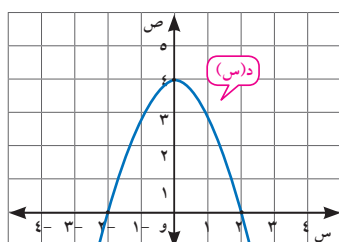
وقيمة عظمى مطلقة = ١

٣١) القيمة الصغرى المطلقة = ٠

القيمة العظمى المطلقة = ٨١

٣٢) القيمة الصغرى المطلقة = ٢

القيمة العظمى المطلقة = ١٨



٤١

٣٣ القيمة العظمى المطلقة = ٢

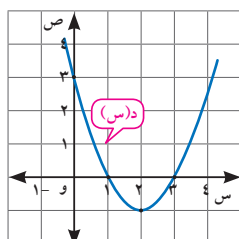
القيمة الصغرى المطلقة =  $\frac{7}{8}$

٣٤ قيمة عظمى مطلقة = ١٦ ،

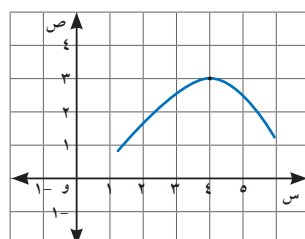
قيمة صغرى مطلقة = -١٦

٣٥ ٣٦ قيمة عظمى مطلقة، -٤ قيمة صغرى مطلقة

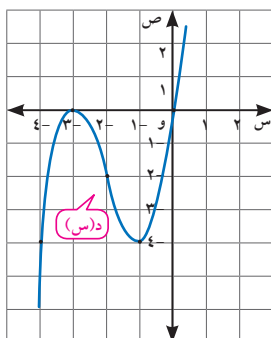
٣٦ -٥٤ قيمة صغرى مطلقة، ٣ قيمة عظمى مطلقة



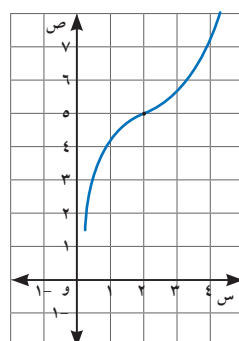
٤٢



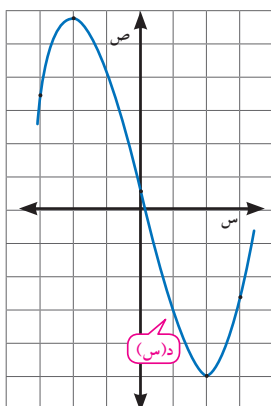
٣٧



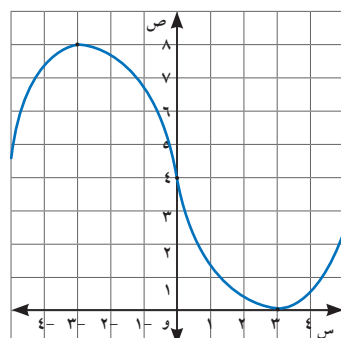
٤٣



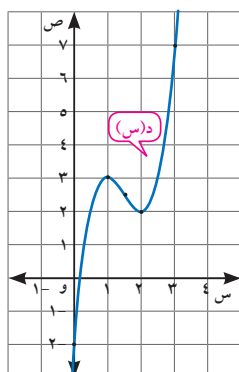
٣٨



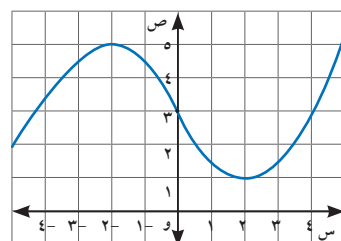
٤٤



٣٩



٤٥



٤٠

## الوحدة الرابعة

### تمارين ٤ - ١

١ ب ٢ د ٣ ب

٤  $\frac{1}{3} (س - ٢)^\circ (٢ + ٥س) + ث$

٥  $\frac{1}{3} (س - ٢)^\circ [٢ + ٤س + ٢س^٢] + ث$

٦  $\frac{1}{٨٤} (س - ٢)^\circ (١ - ٢س)^\circ (١ + ٢س)^\circ + ث$

٧  $\frac{٢}{١٥} (س + ٤)^\circ (٣س - ٨) + ث$

٨  $\frac{٢}{٣٥} (س + ١)^\circ (٩س - ٩) + ث$

٩  $\frac{1}{٧} (س + ٣)^\circ (٥س - ٤س^٢ + ٣) + ث$

١٠  $\frac{1}{٦} لو (٣س + ٢) + ث$

١١  $س - لو |١ + س| + ث$

١٢  $\frac{٢}{٣} (س + ٥) \sqrt{١ - س} + ث$

١٣  $\frac{1}{٥} (٣س + ٢س^٢ + ٢) \sqrt{١ - س^٢} + ث$

١٤  $-\frac{1}{٦} هـ - ٢س + ث$

١٥  $لو - |هـ - ٣س + س| + ث$

١٦  $\frac{1}{٦} (لو س)^\circ + ث$

١٧  $\frac{1}{٤} (لو س)^\circ + ث$

١٨  $لو |لو س| + ث$

١٩  $(٢س - ١) هـ + ٢س + ث$

٢٠  $\frac{1}{٦} (س - ١) هـ + ٢س + ث$

٢١  $-\frac{١ + ٢س}{٤ هـ - ٢س} + ث$

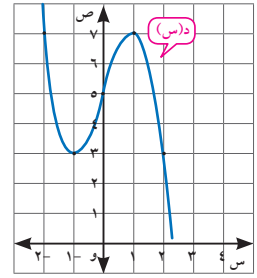
٢٢  $\frac{1}{١٦} س^\circ (٤ لو س - ١) + ث$

٢٣  $س (لو س - ٢) + ث$

٢٤  $ث = س [(لو س)^\circ - ٢ لو س + ٢] + ث$

٢٥  $-\frac{1}{س} (١ + لو س) + ث$

٢٦  $\frac{٢س}{٤} [٢س + ٢س^٢ + ١] + ث$



٤٦

٤٧  $\therefore س = ٦, ج = ٠, \therefore ا = ٢, ب = -٣$

٤٨ بعدى المستطيل هما ٥ متر، ٥ متر

٤٩ ب ٢٨ وحدة مربعة

٥٠  $ع = ٢٥٠ \pi \sqrt[٣]{٣} سم$

٥١  $١٠ \sqrt[٢]{٢} سم$

٥٢ ٢ وحدة مربعة ٥٤  $\frac{٣}{٢}$  مترا

حل الاختبار التراكمي

١ [١]  $\infty, ٢ [ب] س = ٢ ج س = ٥$

٥ [١]  $-\infty, -١, ١, ٥, \infty$

٢ [١] عند  $س = \frac{ب}{١}$  توجد قيمة عظمى محلية

ب د متزايدة على  $[-\frac{٥}{٦}, \frac{٥}{٦}]$

متناقصة على  $[\frac{٥}{٦}, \infty)$

٣  $(٠, ١), (١, ٠), (٠, -١)$  نقط حرجه

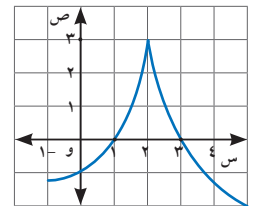
فترات التزايد:  $[-١, ٠], [٠, \infty)$

فترات التناقص:  $[-\infty, -١], [١, ٠]$

٤ النقطة الحرجة:  $(٨, ٢)$

تحذب لأعلى على  $[-\infty, ٢]$

تحذب لأسفل  $[٢, \infty)$  نقطة الانقلاب:  $(٨, ٢)$



٥

٦ [١]  $ا = -٣, ب = ٣$

ب التحذب: لأعلى على  $[-١, \infty)$

لأسفل على  $[١, \infty)$  نقطة انقلاب  $(٢, ١)$

٧  $(٣, ٢) (٨, \frac{٧}{٤}) (٠, \frac{٧}{٤})$

$$٢٧) \frac{1}{4} \text{ س } ٢ [٢ (لو \text{س}) - ٢ - لو \text{س} + ١] + \text{ث}$$

$$٢٨) \text{ص} = لو | \text{س} - ٣ | + ٣$$

$$٢٩) \text{ص} = \frac{٢}{١٥} (١ + \text{س})^{\frac{٢}{٣}} (٣ - \text{س}) + ١$$

$$٣٠) \text{ص} = \text{س}^٣ - ٣ + \text{س}^٢$$

د)  $٤ =$  قيمة عظمى محلية

تمارين ٤ - ٢

$$١) \text{د} \quad ٢) \text{أ} \quad ٣) \text{ب} \quad ٤) \text{ب}$$

$$٥) \sqrt[٣]{٣} \text{ جاس} + \text{ث}$$

$$٦) - \frac{1}{٤} \text{ ظنا } (٢ \text{ س} + ٣) + \text{ث}$$

$$٧) - \text{جتا س} + \text{ث} \quad ٨) - \frac{1}{4} \text{ جتا } ٢ \text{ س} + \text{ث}$$

$$٩) \text{س} + \text{ث}$$

$$١٠) \text{س} + \frac{1}{٤} \text{ جتا } ٢ \text{ س} + \text{ث}$$

$$١١) - \frac{1}{4} \text{ جتا س} + \text{ث} \quad ١٢) \frac{1}{٦} \text{ جاس} + \text{ث}$$

$$١٣) \frac{1}{٣} \text{ جا } (٣ + ٥) + \text{ث}$$

$$١٤) \frac{1}{٤} (٣ + \text{جاس}) + \text{ث}$$

$$١٥) \frac{1}{٥} \text{ قاس} + \text{ث} \quad ١٦) \text{جاس} - ٤ \text{ ظاس} + \text{ث}$$

$$١٧) \frac{1}{٤} \text{ س} + \frac{1}{4} \text{ جا } ٢ \text{ س} + \text{جاس} + \text{ث}$$

$$١٨) \frac{٥}{٢} \text{ س} + \frac{1}{4} \text{ جا } ٢ \text{ س} + \text{ظاس} + \text{ث}$$

$$١٩) \text{ظاس} - \frac{1}{٤} \text{ جا } ٢ \text{ س} + \text{ث}$$

$$٢٠) ٢ \text{ ص} = ١٤ + ٩ \text{ س} + \text{جتا } ٢ \text{ س}$$

$$٢١) \text{ص} = \text{س}^٢ + ٨ + \frac{١}{٢} \text{ ظاس}$$

$$٢٢) \text{ص} = ٢ \text{ ظنا س} + ٣$$

تمارين ٤ - ٣

$$١) \text{ج} \quad ٢) \text{د} \quad ٣) ٢٠ \quad ٤) ٢٢$$

$$٥) \frac{٢٤٢}{٥} \quad ٦) ٤ (١ - \sqrt[٣]{٢})$$

$$٧) \frac{١٤}{٣} \quad ٨) ٤, ٤٣ \simeq$$

$$٩) ٤ \quad ١٠) \frac{1}{٥} (٤)^\frac{٤}{٥}$$

$$١١) \frac{١١٢}{٥} \quad ١٢) \frac{٤}{\pi}$$

$$١٣) \frac{1}{٢} \quad ١٤) ١٦ - ٧\text{هـ}^٣$$

$$١٥) ٨ \text{ أ} \quad ١٢ \text{ ب} \quad ٦ \text{ ج}$$

$$١٦) \text{أ} \quad ١١) \text{ب} \quad \text{صفر} \quad \text{ج} \quad ٦$$

$$١٧) ٢٠$$

تمارين ٤ - ٤

$$١) \frac{1}{4} \text{ وحدة مربعة} \quad ٢) ٣ \text{ وحدة مربعة}$$

$$٣) ٢ \text{ لو } ٣ \text{ وحدة مربعة} \quad ٤) ٦ \text{ وحدة مربعة}$$

$$٥) \frac{٩}{٤} \text{ وحدة مربعة} \quad ٦) \frac{١٦}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

$$٧) \text{ج} \quad ٨) \text{د} \quad ٩) \text{ج} \quad ١٠) \text{ب}$$

$$١١) ١٢ \text{ وحدة مربعة} \quad ١٢) ٧ \text{ وحدة مربعة}$$

$$١٣) \frac{٣٨}{٣} \text{ وحدة مربعة} \quad ١٤) \frac{٢}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

$$١٥) ٣ \text{ وحدة مربعة} \quad ١٦) ٢, ٢٥ \text{ وحدة مربعة}$$

$$١٧) ٢, ٥ \text{ وحدة مربعة} \quad ١٨) ٩ \text{ وحدات مربعة}$$

$$٢٠) ٢٢ \text{ وحدة مربعة}$$

تمارين ٤ - ٥

$$١) \text{د} \quad ٢) \text{ب} \quad ٣) \text{ب} \quad ٤) \text{ج}$$

$$٥) \pi ٩ \text{ وحدة مكعبة} \quad ٦) \pi ٩ \text{ وحدة مكعبة}$$

$$٧) \frac{٣}{4} \text{ وحدة مكعبة} \quad ٨) \pi ٢٤ \text{ وحدة مكعبة}$$

$$٩) \frac{\pi}{٣} \text{ وحدة مكعبة} \quad ١٠) \pi ٣٢ \text{ وحدة مكعبة}$$

$$١١) ٨ \text{ وحدة مكعبة} \quad ١٢) \frac{٩٦}{٥} \text{ وحدة مكعبة}$$

$$١٣) \pi ٣٦ \text{ وحدة مكعبة}$$

$$١٤) \text{أولاً: } \pi ٨ \text{ وحدة مكعبة}$$

$$\text{ثانياً: } \frac{٥١٢}{١٥} \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

$$١٥) \pi ٩ \text{ وحدة مكعبة} \quad ١٦) \pi ٥٠ \text{ وحدة مكعبة}$$

التمارين العامة

$$١) \text{ج} \quad ٢) \text{د} \quad ٣) \text{أ} \quad ٤) \text{أ}$$

$$٥) \text{ج} \quad ٦) ٦ \text{ س دس}$$

$$٧) ٥ (٣ + \text{س})^{\frac{٢}{٣}} \text{ دس}$$

$$٨) ٣ (١ + \text{س})^٣ (١ - \frac{1}{\text{س}}) \text{ دس}$$

$$٩) ٥ - ٥ \text{ هـ} - ٥ \text{ دس}$$

$$١٠) (٣ + \text{س}) \text{ هـ} - ٢ \text{ س}^٢ + ٣ \text{ دس}$$

$$١٢) \frac{٢ \text{ س}}{١ + ٢ \text{ س}} \quad ١٣) \frac{٢ - \text{لو}}{\text{س}} \quad ١٠ \text{ دس}$$



١٤) أ)  $\frac{4}{3}$  وحدة مربعة ب)  $2\pi$  وحدة مكعبة

### إجابات الاختبارات

#### الاختبار الأول

١

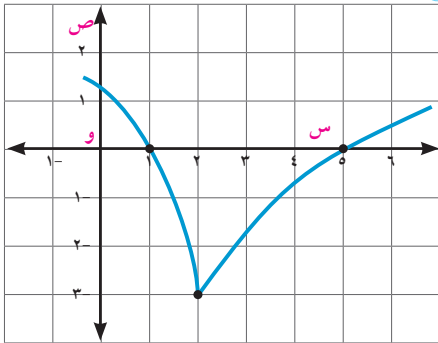
١	٢	٣	٤	٥	٦
ج	ب	ب	ب	د	ج

٢) أ)  $\frac{1}{4}$  جتا<sup>٤</sup> س + ث ب)  $\frac{1}{3}$

٣) أ) ١٤ س + ٥ ص - ٦ = ٠ ب) ٢ سم/د ، ٦ دقيقة

٤) أ) د متناقصة على  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$  ب) ٦٤ وحدة مربعة

٥) أ)  $\frac{27}{5}$  وحدة مكعبة ب) ٦٤ وحدة مربعة



#### الاختبار الثاني

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
ب	ج	ب	أ	ج	ج

٢) أ)  $\frac{1}{8} (1 - 2س)^4 (1 + 8س)$  + ث ب)  $\frac{1}{4} - 2س^2 [1 + 2س]$

٣) أ)  $\frac{\text{ص جاس} - \text{جتا ص}}{\text{جتا س} - \text{ص جاس}}$  ب) صغرى مطلقة = ٥ ، عظمى مطلقة = ١٣

٤) أ) د  $(1 - 1) = ٠$  قيمة صغرى محلية ب) صغرى مطلقة = ٥ ، عظمى مطلقة = ١٣

٥) أ) د  $(1) = ١$  قيمة عظمى محلية ب) ٣٦ سم<sup>٢</sup>/د

١٤) ٣- ظا (٣-س-١) قتا<sup>٢</sup> (٣-س-١) س

١٥)  $\sqrt[4]{س^٢}$  س<sup>٢</sup> س

١٦)  $\sqrt[4]{س^٢}$  س<sup>٢</sup> س

١٧)  $\sqrt[4]{س^٢}$  س<sup>٢</sup> س

١٨)  $\frac{227}{12}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

١٩)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٠)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢١)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٢)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٣)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٤)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٥)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٦)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٧)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٨)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٢٩)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٠)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣١)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٢)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٣)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٤)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٥)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٦)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٧)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٨)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٣٩)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٤٠)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

الاختبار التراكمي

١) ب ٢) ج ٣) ب ٤) ج

٥) د ٦) د ٧) د

٨)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

٩)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

١٠)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

١١)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

١٢)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

١٣)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

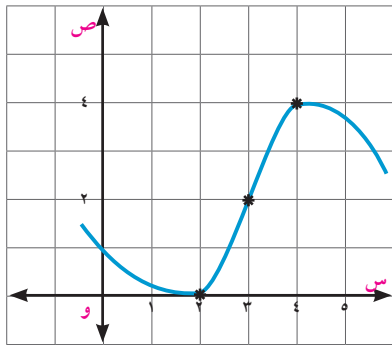
١٤)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

١٥)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤

١٦)  $\frac{23}{3}$  س<sup>٣</sup> - ٢س<sup>٢</sup> + ٣س - ٤



٤ أ  $\frac{1}{4}$  وحدة مربعة  
ب



٥ أ  $6\pi, 6$  سم<sup>٢</sup>/ث

الاختبار الخامس

١ أ  $[-\infty, 0], [2, \infty]$  س

ب  $\{0, 2\} \ni$  س ج  $[1, \infty]$

د  $0 =$  س هـ  $2 = (1)$  د

و ٤ وحدات مربعة

٢ أ  $2 - \frac{5}{4} \text{ س} + \frac{5}{4} \text{ ث}$  لو  $\frac{5}{4} |3\text{س} - 1| + \text{ث}$   
ب د متناقصة على  $[1, 3]$

متزايدة على  $[-\infty, 1], [3, \infty]$

ج (١-) قيمة صغرى مطلقة، (٣) قيمة عظمى مطلقة

٣ أ س  $6 - \text{ص} + 18 - \frac{\pi}{4} = 0$  ب ٢ دقيقة

٤ أ هـ  $2^-$  ب  $30^\circ \text{ سم}, 60^\circ \text{ سم}$

٥ أ  $\frac{206}{15} \pi$  وحدة مكعبة

ب أ  $3 = -$  ، ب  $0 =$

الاختبار السادس:

١

٦	٥	٤	٣	٢	١
ب	أ	ب	أ	أ	ب

٢ أ  $-\frac{7}{2} \text{ لو} |5\text{س} - 2| + \text{ث}$

ب  $-\frac{3}{5} \text{ هـ} - 5\pi + \text{لو} |س| + \text{ث}$

٣ أ  $-\frac{1}{4} \text{ قتا} 3\text{س} + \text{ث}$  ب  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

٥ أ ٩ وحدات مربعة ب  $6 = -$  ،  $9 =$  ب  
الاختبار الثالث

١

٦	٥	٤	٣	٢	١
أ	أ	ج	د	ب	ب

٢ أ س  $(1 + \text{لو س}^2)$

ب المنحنى محدب لأعلى على  $[-\infty, 4]$

$[4, \infty]$  ولا توجد نقط انقلاب

٣ أ  $\frac{1}{4} (5 + \text{س}^4) (5 - \text{س}) + \text{ث}$

ب  $(2 - 1)$  هـ  $3 + \text{س}^2 + \text{ث}$

ب قيمة عظمى مطلقة  $= 0$

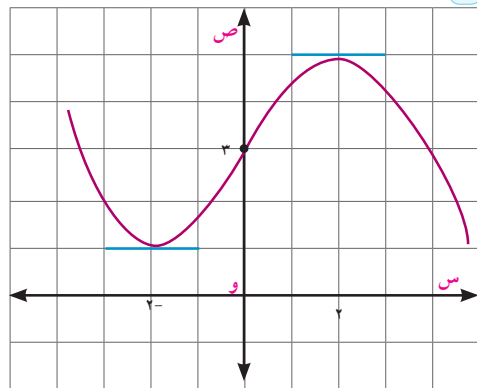
قيمة صغرى مطلقة  $= -27$

٤ أ لو  $\frac{1}{4} =$  وحدة طول

ب ل  $3\sqrt{2}$  سم<sup>٢</sup>/د

٥ أ  $\frac{9}{4}$  وحدة مربعة

ب



الاختبار الرابع

١

٦	٥	٤	٣	٢	١
ج	ج	د	ج	ب	ب

٢ أ س  $2 - 3\text{ هـ} + \text{ث}$

ب  $\frac{2}{3} (3 - \text{س}) \sqrt{3 + \text{س}} + \text{ث}$

٣ أ  $11 -$  ب  $3\text{س}^2 - 3\text{س}$  د  $(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 3\text{س}$

٤ (أ) قيمة عظمى مطلقة = ٠

قيمة صغرى مطلقة = -٥

ب) ١٢ = -

٥ (أ)  $\frac{3}{20}$

ب)  $\frac{5}{4}$  وحدة مربعة ،  $4\pi$  وحدة مكعبة

الاختبار السابع :

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
ب	أ	أ	ب	أ	ب

٢ (أ) - س جتا س + جاس + ث ،  $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$

ب) ص = س -  $\frac{\pi}{4}$

٣ (أ) المنحنى محدب لأسفل لكل س  $\exists$  ع

ولا توجد نقط انقلاب

ب)  $6\pi^3$  سم

٤ (أ)  $\frac{116}{15}$  ب) مو =  $\frac{200}{\pi}$  متراً

٥ (أ) القيمة العظمى المطلقة = ٥

القيمة الصغرى المطلقة = ١

ثانياً: ٤ وحدات مربعة

ب)  $2\pi$  وحدة مكعبة

الاختبار الثامن

١ (أ)  $\frac{3}{2}$  - ب) ٧ قاس ظا س هـ قاس

ج) (٠، ٠) د)  $\sqrt{2}$  د(س) دس

هـ)  $\frac{32}{3}$  وحدة مربعة و  $\frac{1}{2}$

٢ (أ)  $\frac{1}{4}$  س  $+\frac{9}{4}$  س  $+\frac{2}{4}$  س  $+\frac{27}{4}$  س

- هـ- س  $-\frac{3}{4}$  س  $+\frac{2}{4}$  س  $+\frac{2}{4}$  س  $+\frac{2}{4}$  س

ب) ١٢ س - ص  $+\frac{2}{4}$  س  $+\frac{2}{4}$  س  $+\frac{2}{4}$  س = ٠

٣ (أ)  $\frac{13}{3}$

٤ (أ) القيمة العظمى المطلقة = ٦

والقيمة الصغرى المطلقة = ١

ب)  $-\frac{3}{4}$  م/د

٥ (أ)  $\frac{\pi}{3}$  ب) أولاً: ١٣ وحدة مربعة

ثانياً:  $57\pi$  وحدة مكعبة

الاختبار التاسع :

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
أ	د	أ	ب	ج	ج

٢ (أ)  $\frac{3}{4}$  لو  $|س - ١| + ٣$

هـ  $س^3 - [س^2 - ٢س + \frac{2}{3}] + ٣$

ب)  $١٨ \frac{2}{3}$

٣ (أ) ب) ص =  $٤س + ٥$

٤ (أ)  $\frac{57}{100} = د$

ب) د(١) = ٨ قيمة عظمى محلية

، د(١) = ٤ قيمة صغرى محلية

، (٦، ٠) نقطة إنقلاب

٥ (أ) ص =  $\frac{1}{3}س + ٢$  ب) (٣، ٣)

ج) ص = س د)  $\frac{45}{4}\pi$  وحدة مكعبة

الاختبار العاشر :

١ (أ) هـ ب) ٦ قتا س (٥ - ٢ ظتا س)

ج) ٣ د) ١٦ - هـ صفر و)  $\frac{16}{15}$

٢ (أ)  $\frac{1}{3}$  - لو  $|جتا (٣س + ١)| + ٣$

$\frac{1}{18}$  (٣س - س) + ٠

ب) أولاً: ٢ س - ٣ ص - ٧ = ٠ ثانياً:  $\frac{1}{9}$

٣ (أ) تحذب لأعلى على [٠، ٠]

تحذب لأسفل على  $[-\infty، ٠]$  ، [٠، ١] ،  $\infty$

(١، ٠) نقطة إنقلاب

ب)  $٤٨ = -$

٤ (أ)  $\frac{32}{3}$  وحدات مربعة ب)  $\frac{5}{3}$  سم/ث

٥ (أ) أولاً: ص =  $\frac{1}{13}(س + ١) + ٩$

ثانياً:  $(\frac{2}{3}، \frac{1}{3})$  نقطة انقلاب

ب)  $\frac{23}{14}\pi$  وحدة مكعبة



رقم الكتاب	طباعة الغلاف	طباعة المتن	ورق الغلاف	ورق المتن	عدد الصفحات بالغلاف	المقاس
٢٧٧/١٠/٣/٣٣/٤٨	٤ لون	٤ لون	١٨٠ جرام	٧٠ جرام	١٧٢	$\frac{1}{8}$ (٨٢×٥٧)

<http://elearning.moe.gov.eg>

دار درويش للطباعة